МГУ – ШКОЛЕ

В. Н. Литвиненко

Геометрия

11

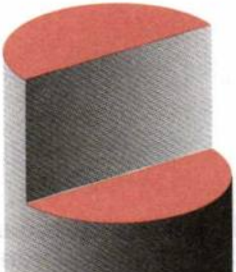
Готовимся к ЕГЭ

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

В. Н. Литвиненко

Геометрия



Готовимся к ЕГЭ

11 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

Москва «Просвещение» 2012

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Л64

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

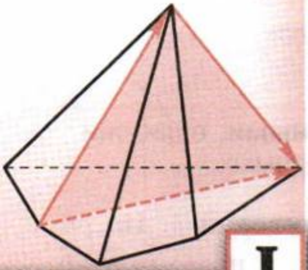
Литвиненко В. Н.
Л64 Геометрия. Готовимся к ЕГЭ. 11 класс : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / В. Н. Литвиненко. — М. : Просвещение, 2012. — 160 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-021189-5.

В пособии после краткого напоминания основных теоретических сведений из курса геометрии 11 класса по каждой теме приведены оригинальные задания на построение в пространстве, обстоятельные решения типовых задач, соответствующих уровню С на ЕГЭ, и задания для самостоятельной работы. Решение задач направлено на неформальное восприятие теоретического материала и способствует развитию пространственных представлений учащихся.

Книга адресована учащимся, изучающим геометрию по учебнику авторов Л. С. Атанасяна и др. как на базовом, так и на профильном уровне и готовящимся к выпускным и вступительным экзаменам.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-021189-5



Глава I

Векторы в пространстве

1. Понятие вектора в пространстве. Коллинеарные векторы

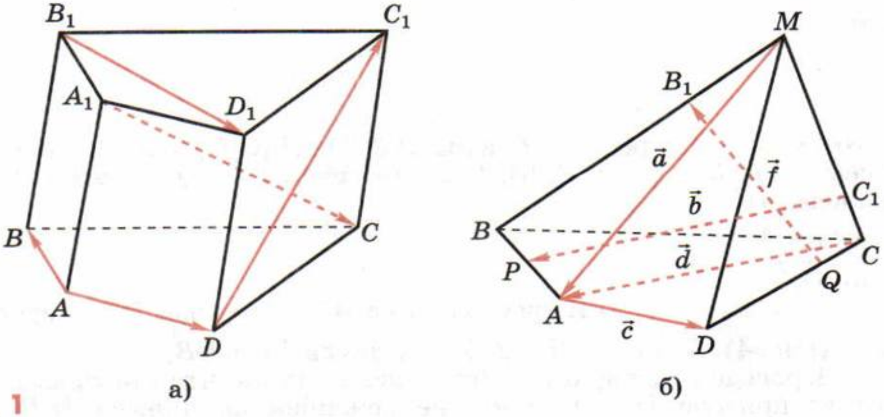
Основные сведения о векторах в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Определение

Вектором называется направленный отрезок. Запись $\overrightarrow{AB}$ означает, что отрезок AB является вектором с началом в точке A и с концом в точке B.

Векторы можно обозначить и короче: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д. На рисунке 1, *а* изображена призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$, а на рисунке 1, *б* — пирамида $MABCD$ и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{f}$.

Для общности считают, что отрезок, начало которого совпадает с его концом, также является вектором. Такой вектор называют *нулевым*. Так, векторы $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ... — нулевые векторы. Нулевой вектор иногда обозначают символом $\vec{0}$ (ноль). Понятно, что направление нулевого вектора является неопределённым.



а) б)

Рис. 1

Определение

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарность двух векторов обозначают символом $\parallel$. На рисунке 2, *а* векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежат на одной прямой, и поэтому $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$ и $\vec{b} \parallel \vec{c}$. На рисунке 2, *б* вектор $\vec{p}$ лежит на прямой k, векторы $\vec{q}$ и $\vec{v}$ — на прямой l и $k \parallel l$, поэтому $\vec{p} \parallel \vec{q}$, $\vec{p} \parallel \vec{v}$ и $\vec{q} \parallel \vec{v}$.

Если многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3) — призма, точка A_2 взята на ребре AA_1, точки C_2 и C_3 — на прямой CC_1, точки P и P_1 — середины соответственно рёбер BC и B_1C_1, то $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BB_1} \parallel \overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{C_3C_2}$.

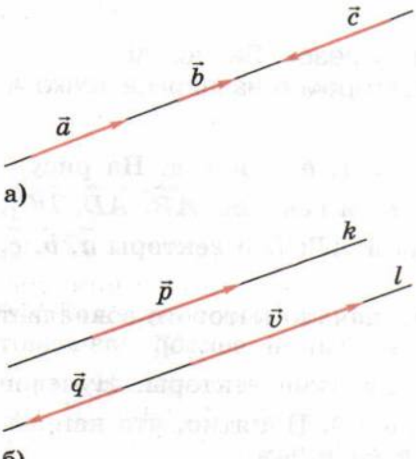


Рис. 2

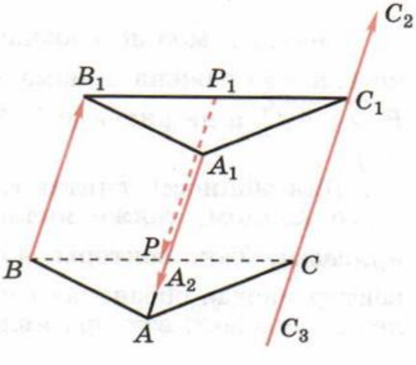


Рис. 3

Пример 1. На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P — его середина, а в грани ABB_1A_1 взята точка K — центр этой грани. Докажем, что:

а) $\overrightarrow{PK} \parallel \overrightarrow{DB_1}$;

б) $\overrightarrow{D_1C} \nparallel \overrightarrow{DB_1}$.

Доказательство. а) В треугольнике AB_1D отрезок PK — средняя линия (рис. 4). Значит, $PK \parallel DB_1$. Но тогда $\overrightarrow{PK} \parallel \overrightarrow{DB_1}$.

б) Проведём прямую DC_1 (см. рис. 4). Ясно, что эта прямая пересекает прямую D_1C в точке, не лежащей на прямой B_1D. Это

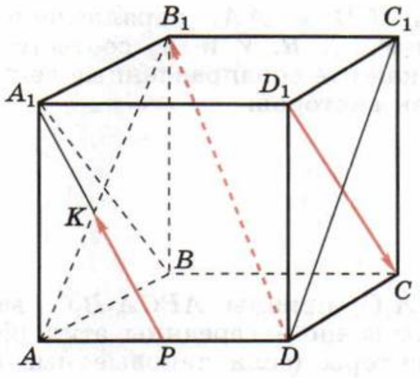


Рис. 4

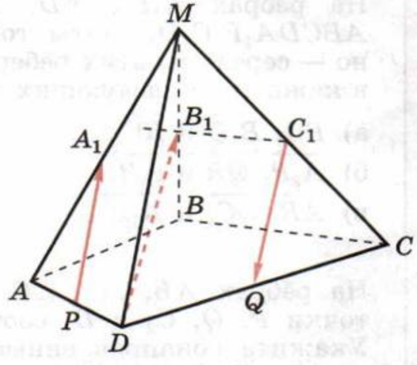


Рис. 5

значит, что прямые D_1C и B_1D — скрещиваются, т. е. $D_1C \nparallel B_1D$. Поэтому и $\overrightarrow{D_1C} \nparallel \overrightarrow{DB_1}$.

Пример 2. Точки A_1, B_1 и C_1 — середины боковых рёбер MA, MB и MC пирамиды $MABCD$ соответственно, а точки P и Q — середины сторон AD и CD её основания.

Докажем, что:

а) $\overrightarrow{PA_1} \parallel \overrightarrow{C_1O}$;

б) $\overrightarrow{C_1Q} \nparallel \overrightarrow{DB_1}$.

Доказательство. а) Отрезки PA_1 и QC_1 — средние линии треугольников MAD и MCD соответственно (рис. 5). Поэтому $PA_1 \parallel MD$ и $QC_1 \parallel MD$. Это значит, что $PA_1 \parallel QC_1$. Тогда и $\overrightarrow{PA_1} \parallel \overrightarrow{C_1Q}$.

б) Проведём прямую B_1C_1 (см. рис. 5). Пересекающимися прямыми B_1C_1 и C_1Q определяется плоскость B_1C_1Q. Прямая DB_1 пересекает эту плоскость в точке B_1, не лежащей на прямой C_1Q. Это значит, что прямые DB_1 и C_1Q скрещивающиеся. Таким образом, прямая DB_1 не параллельна прямой C_1Q. Тогда и векторы $\overrightarrow{C_1Q}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ неколлинеарны.

C Задания для самостоятельной работы

1 На ребре CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P — середина этого ребра, а в грани $ABCD$ взята точка O — её центр. Укажите коллинеарные векторы (если таковые имеются) в каждой из следующих троек векторов:

а) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{C_1P}$;

б) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{BD}$;

в) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$.

2 На рёбрах A_1B_1, AD, B_1C_1, CD и AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q, R, V и A_2 соответственно — середины этих рёбер. Укажите сонаправленные векторы в каждой из следующих троек векторов:

а) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{RV}$;

б) $\overrightarrow{A_2P}$, $\overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{AB_1}$;

в) $\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{QC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$.

3 На рёбрах AB, AC, CC_1 и A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки P, Q, C_2 и D_1 соответственно — середины этих рёбер. Укажите сонаправленные векторы (если таковые имеются) в каждой из следующих троек векторов:

а) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$;

б) $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{QA_1}$ и $\overrightarrow{B_1P}$;

в) $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{A_1Q}$ и $\overrightarrow{CD_1}$.

4 На рёбрах BC, AD и B_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q и V соответственно — середины этих рёбер. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{B_1V} \parallel \overrightarrow{DA}$;

б) $\overrightarrow{BQ} \nparallel \overrightarrow{B_1P}$;

в) $\overrightarrow{VC} \parallel \overrightarrow{A_1Q}$;

г) $\overrightarrow{VQ} \parallel \overrightarrow{C_1D}$.

5 На рёбрах MB и MC, MD и CD пирамиды $MABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, взяты точки B, C_1, D_1 и P соответственно — середины этих рёбер. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке O. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{MB} \parallel \overrightarrow{C_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{OB_1} \parallel \overrightarrow{PC_1}$;

в) $\overrightarrow{MA} \parallel \overrightarrow{OD_1}$.

6 На рёбрах AB, BC и MB пирамиды $MABC$ взяты точки D, E и B_1 — середины этих рёбер соответственно. Точки O и K — центры основания ABC и грани MAB соответственно. Докажите, что:

а) $\overrightarrow{B_1E} \parallel \overrightarrow{CM}$;

б) $\overrightarrow{OK} \parallel \overrightarrow{MC}$;

в) $\overrightarrow{OK} \parallel \overrightarrow{B_1E}$.

2. Длина вектора. Равенство векторов

Определение

Длиной ненулевого вектора называется расстояние между двумя точками: началом и концом этого вектора.

Считается, что нулевой вектор имеет длину. Она равна нулю. Для обозначения длины вектора используется знак $|\ |$. Так, запись $|\overrightarrow{AB}|$ читается: модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, или длина вектора $\overrightarrow{AB}$. Аналогично, $|\vec{a}|$ — длина вектора $\vec{a}$. Так как длина нулевого вектора считается равной нулю, то $|\overrightarrow{AA}| = |\vec{0}| = 0$.

Пример 3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : BC = 1 : 2$. Отрезок MO, соединяющий вершину пирамиды с точкой O — центром её основания, является высотой пирамиды и $MO = AB$. Точка C_1 — середина ребра MC. Считая $AB = a$, найдём длины следующих векторов:

а) $\overrightarrow{OC_1}$;

б) $\overrightarrow{AC_1}$.

Решение. а) Длиной вектора $\overrightarrow{OC_1}$ является расстояние между точками O и C_1 (рис. 6, *а*). Так как отрезок OC_1 — медиана прямоугольного треугольника MOC с гипотенузой MC, то $OC_1 = \frac{1}{2}MC$.

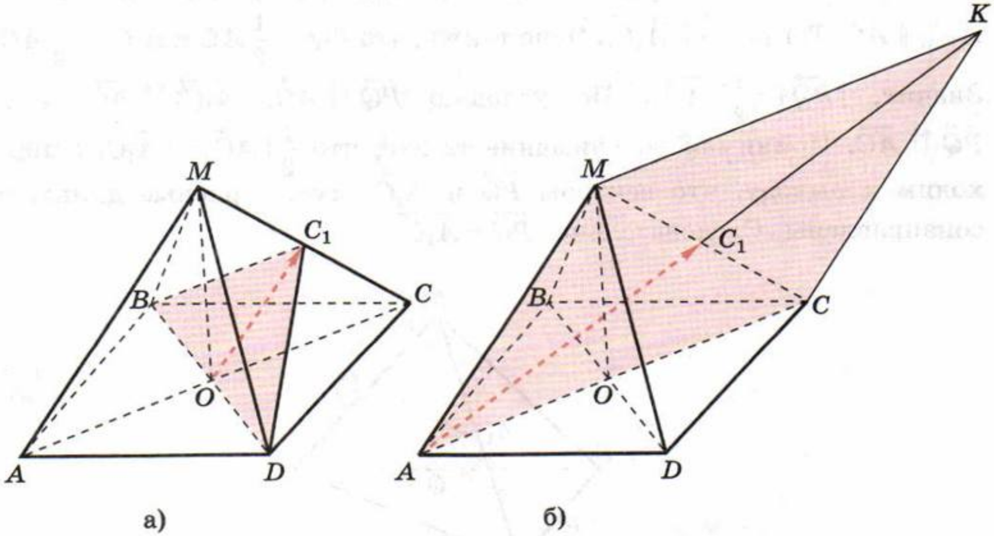


Рис. 6

Из прямоугольного треугольника MOC имеем $MC = \sqrt{MO^2 + OC^2}$.

По условию $MO = AB = a$, т. е. $BC = 2a$ и $OC = \frac{1}{2}AC = $ $= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Тогда $MC = \sqrt{a^2 + \frac{5a}{4}} = \frac{3a}{2}$ и, следовательно, $OC_1 = \frac{3a}{4}$, т. е. $\overrightarrow{OC} = \frac{3a}{4}$.

Продолжим отрезок AC_1 на расстояние $C_1K = AC_1$ (рис. 6, *б*). Тогда в параллелограмме $AMKC$ имеем

$$(2AC_1)^2 + MC^2 = 2\,(MA^2 + AC^2), \text{ или}$$

$$4AC_1^2 + \frac{9a^2}{4} = 2\left(\frac{9a^2}{4} + 5a^2\right), \text{ откуда } AC_1 = \frac{7a}{4}.$$

Таким образом, $|\overrightarrow{AC_1}| = \frac{7a}{4}$.

Определение

Два вектора называются **равными**, если они сонаправлены и длины их равны.

Если, например, векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{RS}$ равны, то пишут: $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{RS}$.

Пример 4. На рёбрах AB, BC, MA и MC пирамиды $MABC$ взяты точки P, Q, A_1 и C_1 соответственно — середины этих рёбер. Докажем, что $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

Доказательство (рис. 7). Из условия ясно, что $PQ \parallel AC$ и $A_1C_1 \parallel AC$. Тогда $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$. Ясно также, что $PQ = \frac{1}{2}AC$ и $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$. Значит, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$. По условию $\overrightarrow{PQ} \upuparrows \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A_1C_1} \upuparrows \overrightarrow{AC}$, т. е. $\overrightarrow{PQ} \upuparrows \overrightarrow{AC}$. Принимая во внимание также, что $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A_1C_1}|$, приходим к выводу, что векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ имеют равные длины и сонаправлены. Следовательно, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

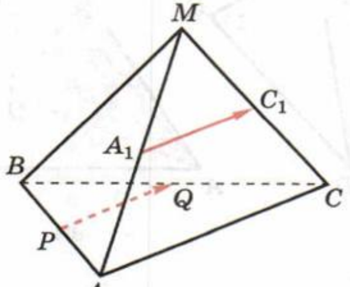


Рис. 7

С Задания для самостоятельной работы

7 В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а её боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания. На рёбрах MA, MB, MC, MD и AD взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 и P соответственно — середины этих рёбер. Считая $AB = a$, $MB = 2a$, найдите длины следующих векторов:

а) $\overrightarrow{DB_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{B_1P}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$; д) $\overrightarrow{C_1P}$; е) $\overrightarrow{CA_1}$.

8 В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной, равной a. Боковое ребро призмы равно $2a$, а её вершина A_1 одинаково удалена от вершин A, B и D основания. Найдите длины следующих векторов:

а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{B_1C}$; в) $\overrightarrow{OC_1}$, где $O = AC \cap BD$; г) $\overrightarrow{B_1D}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$; е) $\overrightarrow{AC_1}$.

9 В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник. Основанием высоты MO пирамиды является точка O — середина ребра AB. На рёбрах AC, MA, MB и MC взяты точки D, A_1, B_1 и C_1 соответственно — середины этих рёбер. Считая $AB = MO = a$, найдите длины следующих векторов:

а) $\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{OC_1}$; в) $\overrightarrow{AC_1}$; г) $\overrightarrow{CA_1}$; д) $\overrightarrow{MD}$; е) $\overrightarrow{B_1D}$.

10 На рёбрах A_1B_1, CD, BB_1 и DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q, B_2 и D_2 — середины этих рёбер. Докажите, что следующие пары векторов равны:

а) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{QC_1}$; б) $\overrightarrow{AB_2}$ и $\overrightarrow{D_2C_1}$; в) $\overrightarrow{C_1P}$ и $\overrightarrow{QA}$.

11 На рёбрах MA, MB, MC, AD и CD пирамиды $MABCD$, основанием которой является параллелограмм, взяты точки A_1, B_1, C_1, P и Q соответственно — середины этих рёбер. Докажите, что следующие пары векторов равны:

а) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{PC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1Q}$ и $\overrightarrow{A_1P}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{PQ}$.

12 Многогранник U составлен из двух пирамид, общим основанием которых является параллелограмм $ABCD$. Вершины M_1 и M_2 многогранника U симметричны относительно точки O — центра параллелограмма $ABCD$. На рёбрах AB, CD, M_1C и M_2A многогранника U взяты точки P, Q, C_1 и A_2 соответственно — середины этих рёбер. Докажите, что следующие пары векторов равны:

а) $\overrightarrow{M_1C}$ и $\overrightarrow{AM_2}$; б) $\overrightarrow{QC_1}$ и $\overrightarrow{A_2P}$; в) $\overrightarrow{QM_1}$ и $\overrightarrow{M_2P}$.

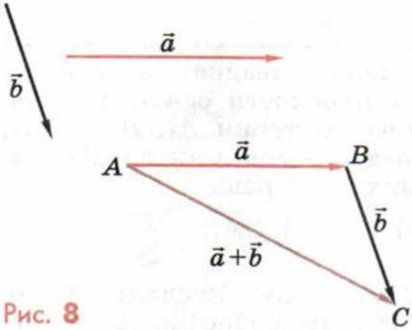


Рис. **8**

3. Сумма векторов. Построение суммы векторов

1. Правило треугольника. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы. С началом в какой-нибудь точке, например в точке A (рис. 8) построим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Затем с началом в точке B построим вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$, полученный таким способом, называют **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Так, пусть многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является призмой (рис. 9), причём $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Если заметить, что $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$, то сумму векторов $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}$ можно представить как сумму векторов $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$. На рисунке 9 это вектор $\overrightarrow{AC_1}$.

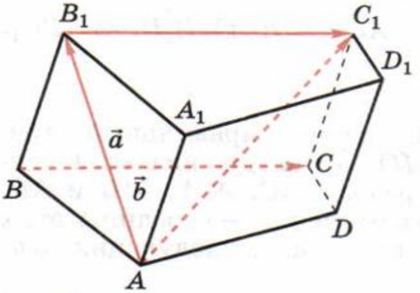


Рис. **9**

Итак, в рассматриваемом случае $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC_1}$. Правило треугольника можно обобщить, распространяя его на случай, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Треугольник ABC получается тогда вырожденным (рис. 10, *а*, *б*).

Сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}$ не зависит от выбора точки A, являющейся началом вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Правило треугольника можно сформулировать, например, так:

Для любых трёх точек пространства P, Q и V (рис. 11, *а*, *в*) *выполняется равенство:*

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QV}=\overrightarrow{PV}.$$

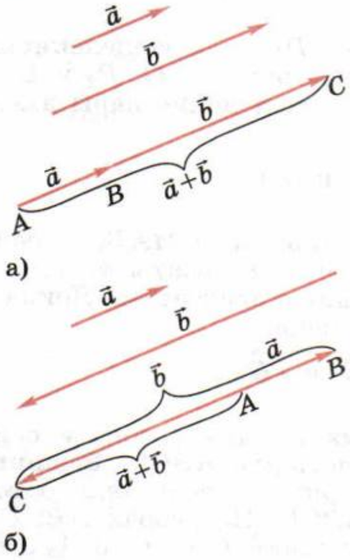


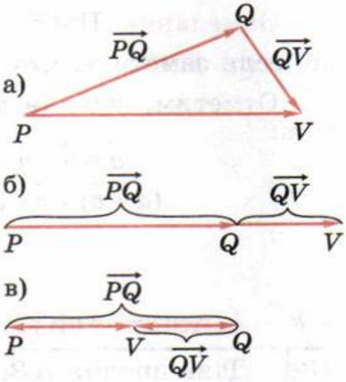
Рис. **10**

2. Правило параллелограмма. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные неколлинеарные векторы (рис. 12). Выберем какую-нибудь точку P и с началом в этой точке построим векторы $\overrightarrow{PV}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{PQ}=\vec{b}$. Проведём далее через точку Q прямую $k \parallel \vec{a}$, через точку V прямую $l \parallel \vec{b}$ и найдём точку $T=k \cap l$.

Четырёхугольник $PQTV$ — параллелограмм по построению, а вектор $\overrightarrow{PT}$ — это вектор, являющийся суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Правило многоугольника. Построение суммы трёх и более векторов легко выполнить по правилу многоугольника, состоящему в использовании правила треугольника нужное число раз.

Так, если требуется найти сумму n данных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, ..., $\vec{a}_n$, то от произвольной точки P отложим вектор $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}_1$ (рис. 13), затем от точки P_1 отложим вектор $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}_2$, от точки P_2 — вектор $\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{a}_3$ и т. д., и, наконец, от точки P_{n-1} отложим вектор $\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \vec{a}_n$. Вектор $\overrightarrow{PP_n}$ является суммой данных векторов, т. е. $\overrightarrow{PP_n} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n$.



$$\overrightarrow{PV} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QV}$$

Рис. 11

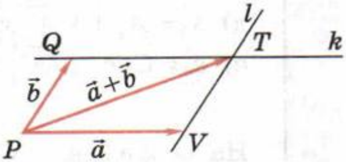


Рис. 12

Пример 5. Пусть многоугольник $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ — призма. Построим вектор $\vec{s}$, являющийся суммой векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{C_1E_1} + \overrightarrow{E_1D} + \overrightarrow{DB}$.

Решение. Слагаемые векторы записаны в такой последовательности, что конец каждого предыдущего вектора является началом последующего (рис. 14). Тогда вектор $\vec{s}$ — это вектор, началом которого является точка A — начало первого из слагаемых векторов, а концом — точка B — конец последнего из слагаемых векторов. Таким образом, по правилу многоугольника $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$.

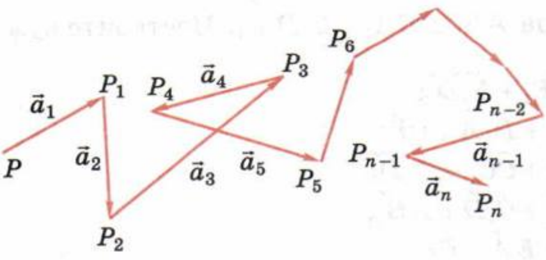


Рис. 13

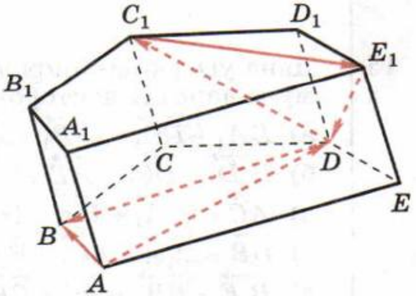


Рис. 14

Замечание. Найти вектор $\vec{s}$ можно и по-другому. Действительно, если заметить, что $\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{C_1E_1}+\overrightarrow{E_1D}=\vec{0}$, то $\vec{s}=\overrightarrow{AD}+\vec{0}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

Отметим, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+a \text{ (переместительный закон)},$$
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \text{ (сочетательный закон)}.$$

C Задания для самостоятельной работы

13 Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сумму заданных векторов:

а) $\vec{s}_1=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{D_1C_1}+\overrightarrow{C_1D}$;

б) $\vec{s}_2=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}$;

в) $\vec{s}_3=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DA}$;

г) $\vec{s}_4=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{D_1B_1}+\overrightarrow{CD_1}$;

д) $\vec{s}_5=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}$;

е) $\vec{s}_6=\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DC}$.

14 На рёбрах AB, CD и MC пирамиды $MABCD$ взяты точки P, Q и C_1 соответственно. Постройте сумму заданных векторов:

а) $\vec{s}_1=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{QB}$;

б) $\vec{s}_2=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{C_1D}+\overrightarrow{PA}$;

в) $\vec{s}_3=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1Q}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{PC_1}+\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{CM}$;

г) $\vec{s}_4=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MD}$;

д) $\vec{s}_5=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC_1}+\overrightarrow{C_1P}$;

е) $\vec{s}_6=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{PM}$.

15 Дана усечённая пирамида $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Постройте сумму заданных векторов:

а) $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{A_1E_1}+\overrightarrow{E_1D_1}$;

б) $\overrightarrow{B_1D_1}+\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{CE}$;

в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{A_1D_1}$;

г) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{D_1A}+\overrightarrow{BC_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D}+\overrightarrow{AB_1}$;

д) $\overrightarrow{B_1E}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}$;

е) $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1E}+\overrightarrow{ED_1}+\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AE_1}+\overrightarrow{ED}$.

4. Разность векторов. Построение разности векторов

Разностью двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{r}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$, т. е. вектор $\vec{a}-\vec{b}=\vec{r}$, если $\vec{b}+\vec{r}=\vec{a}$.

Для построения вектора $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}$ можно воспользоваться приведёнными ниже способами.

1-й способ. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные векторы (рис. 15, *а*). Построим векторы, равные $\vec{a}$ и $\vec{b}$, но имеющие общее начало. Например, $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{PV}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{VQ}$ тогда является искомым, так как сумма векторов $\vec{b}+\vec{r}$ равна вектору $\vec{a}$ (по правилу треугольника).

2-й способ. При построении вектора $\vec{a}-\vec{b}$ этим способом используется вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.

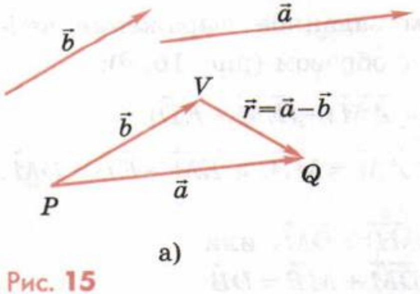
Определение

Вектором, противоположным ненулевому вектору $\vec{m}$, называется такой вектор, длина которого равна $|\vec{m}|$, а направление противоположно направлению вектора $\vec{m}$.

Ясно, что вектору $\overrightarrow{AB}$ противоположен вектор $\overrightarrow{BA}$, вектору $\vec{m}$ противоположен вектор $-\vec{m}$.

Вектор $-\vec{b}$ — противоположный вектору $\vec{b}$ — можно использовать для построения разности векторов $\vec{a}-\vec{b}$. А именно, построим векторы, равные $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, поместив их начало в одну точку.

Например, векторы $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{PR}=-\vec{b}$ имеют общее начало — точку P (рис. 15, *б*). Тогда (по правилу параллелограмма) вектор $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$ является искомым вектором, так как сумма векторов $\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SQ}=\vec{a}$.



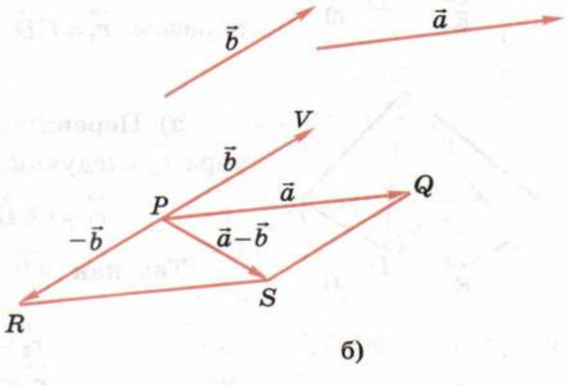


Рис. 15

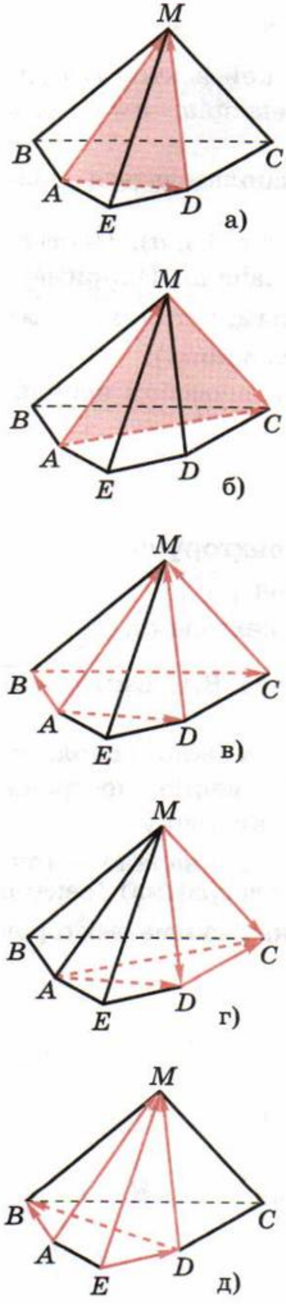


Рис. 16

Пример 6. Дана пирамида $MABCDE$. Построим следующие векторы:

а) $\vec{r}_1=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}$;

б) $\vec{r}_2=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{MC}$;

в) $\vec{r}_3=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})-\overrightarrow{DM}$;

г) $\vec{r}_4=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MC})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD})$;

д) $\vec{r}_5=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ED})-(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{EM})$.

Решение. а) Векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеют общее начало — точку A (рис. 16, *а*). Тогда

$$\vec{r}_1=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DM}.$$

б) Сведём векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MC}$ к какому-нибудь общему началу, например к точке C (рис. 16, *б*), получаем

$$\vec{r}_2=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{CA}-(-\overrightarrow{CM})=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AM}.$$

в) По правилу многоугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+$ $+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$ (рис. 16, *в*). Тогда $\vec{r}_3=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{DM}$, или $\vec{r}_3=-\overrightarrow{MA}-(-\overrightarrow{MD})=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AD}$.

г) Раскроем скобки в задании вектора $\vec{r}_4$ (рис. 16, *г*). Получим

$$\vec{r}_4=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{MD},\text{ или}$$
$$\vec{r}_4=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD},\text{ т. е.}$$
$$\vec{r}_4=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}).$$

Но $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$, а $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DC}$. Таким образом, $\vec{r}_4=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}$, или

$$r_4=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DC}=0.$$

д) Перепишем заданное выражение вектора $\vec{r}_5$ следующим образом (рис. 16, *д*):

$$\vec{r}_5=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{ED}).$$

Так как $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, а $\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DM}$, то

$$\vec{r}_5=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DM},\text{ или}$$
$$\vec{r}_5=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DB}.$$

Пример 7. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Построим следующие векторы:

а) $\vec{p}_1 = 2\left(\frac{4}{5}\vec{a}\right)$; б) $\vec{p}_2 = 2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$; в) $\vec{p}_3 = \sqrt{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{5}}{3}\vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}$.

Решение. а) Так как $2\left(\frac{4}{5}\vec{a}\right) = \frac{8}{5}\vec{a}$, то построим вектор $\vec{p}_1 = \frac{8}{5}\vec{a}$ (рис. 17, *а*). Пусть $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$. На вспомогательном луче l построим отрезок $PQ_1 = 5e$ (e — отрезок, который мы принимаем за единичный) и отрезок $PS_1 = 8e$. Далее проведём прямую Q_1Q и затем прямую $S_1S \parallel Q_1Q$. Длина отрезка PS равна $\frac{8}{5}PQ$, а вектор $\vec{p}_1 = \overrightarrow{PS} = \frac{8}{5}\vec{a}$.

б) Пусть $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{PV} = \vec{b}$ — данные векторы (рис. 17, *б*). Построим последовательно векторы $\overrightarrow{PS} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{PT} = \frac{2}{3}\vec{b}$ и затем вектор $\overrightarrow{PT'} = -\frac{2}{3}\vec{b}$.

Далее по правилу параллелограмма получаем искомый вектор $\vec{p}_2 = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PT'} = 2\vec{a} + \left(-\frac{2}{3}\vec{b}\right) = 2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

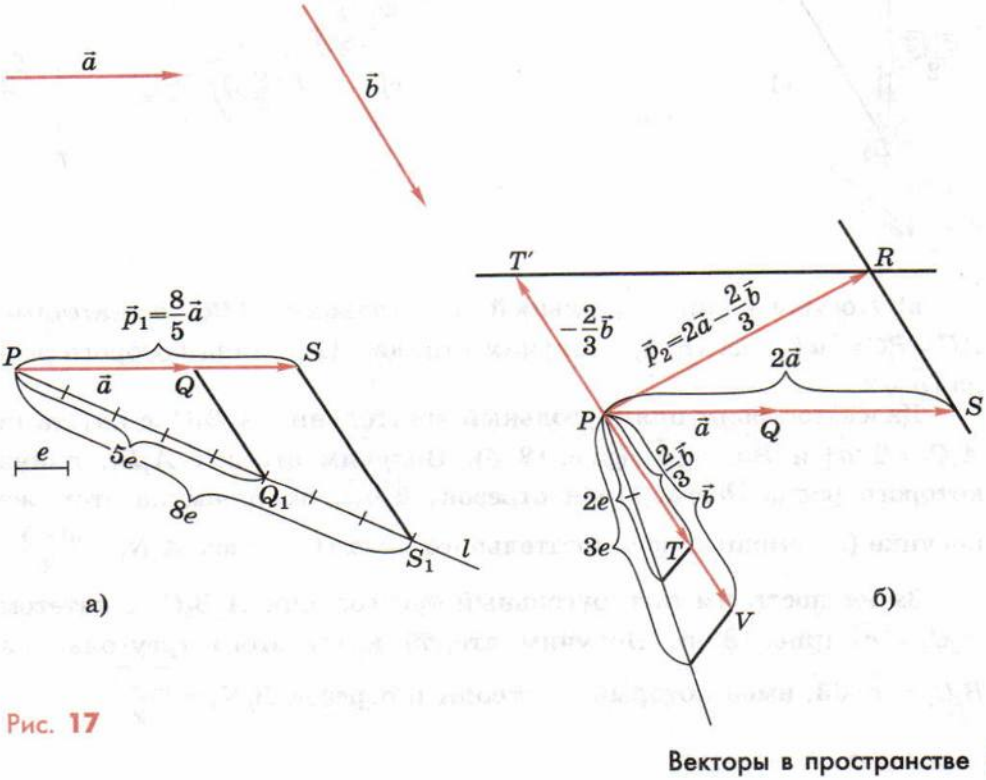


Рис. 17

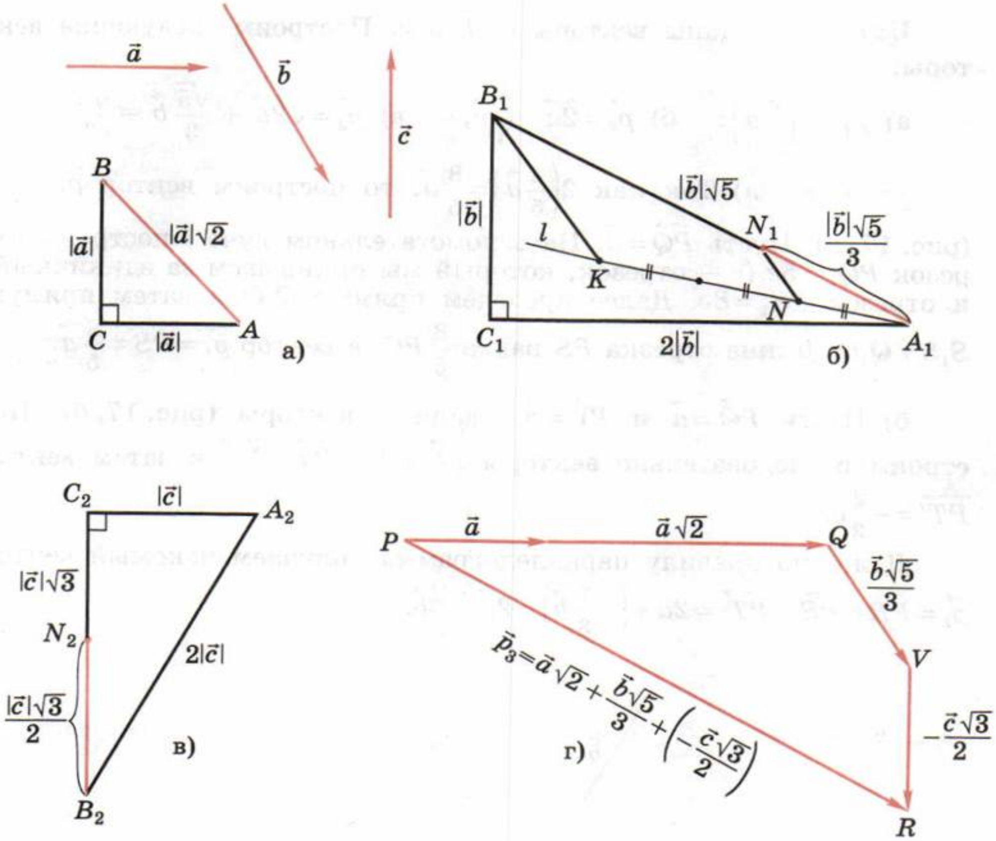


Рис. **18**

в) Построим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = |\vec{a}|$ (рис. 18, *а*). Получим отрезок AB, длина которого равна $|\vec{a}|\sqrt{2}$.

Далее построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $A_1C_1 = 2|\vec{b}|$ и $B_1C_1 = |\vec{b}|$ (рис. 18, *б*). Получим отрезок A_1B_1, длина которого равна $|\vec{b}|\sqrt{5}$. Имея отрезок $|\vec{b}|\sqrt{5}$, построим на этом же рисунке (с помощью вспомогательного луча l) отрезок $A_1N_1 = \frac{|\vec{b}|\sqrt{5}}{3}$.

Затем построим прямоугольный треугольник $A_2B_2C_2$ с катетом $A_2C_2 = |\vec{c}|$ (рис. 18, *в*). Получим второй катет этого треугольника $B_2C_2 = |\vec{c}|\sqrt{3}$, имея который, построим и отрезок $B_2N_2 = \frac{|\vec{c}|\sqrt{3}}{2}$.

Получив отрезки $AB = |\vec{a}|\sqrt{2}$, $A_1N_1 = \frac{|\vec{b}|\sqrt{5}}{3}$ и $B_2N_2 = \frac{|\vec{c}|\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 18, *а—в*), построим векторы $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}\sqrt{2}$, $\overrightarrow{QV} = \vec{b}\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\overrightarrow{VR} = -\frac{\vec{c}\sqrt{3}}{2}$ (рис. 18, *г*).

Вектор $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QV} + \overrightarrow{VR}$ — это искомый вектор $\vec{p_3}$.

C Задания для самостоятельной работы

16 Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте разность заданных векторов:

а) $\vec{r_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{B_1D_1}$;

б) $\vec{r_2} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AC}$;

в) $\vec{r_3} = (\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{B_1C_1}) - (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC_1})$;

г) $\vec{r_4} = (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1D}) - (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB})$;

д) $\vec{r_5} = (\overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{A_1C_1}) - (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AC_1})$;

е) $\vec{r_6} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB_1}) - (\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AD})$.

17 Дана пирамида $MABCDE$. Постройте разность векторов:

а) $\vec{r_1} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EB})$;

б) $\vec{r_2} = (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{DC} - (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MC})$;

в) $\vec{r_3} = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}) - (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}) - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$;

г) $\vec{r_4} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) - (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) - (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC})$;

д) $\vec{r_5} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DA}) - \overrightarrow{DC}$;

е) $\vec{r_6} = (\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{EA}) - (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD}) - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{CD})$.

18 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте векторы $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{r_3}$, $\vec{r_4}$, $\vec{r_5}$, заданные следующим образом:

а) $\vec{r_1} = (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}) - (\overrightarrow{B_1D'} - \overrightarrow{C_1D} - \overrightarrow{C_1D'})$, где точки D и D' — симметричные относительно точки A;

б) $\vec{r_2} = (\overrightarrow{C_1C'} - \overrightarrow{C_1'C_1}) - (\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{B_1C_1}) - (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB_1})$, где точки C' и C_1' — симметричные относительно точки D;

в) $\vec{r_3} = (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB}) - (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})$;

г) $\vec{r_4} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{C_1A_1}) - (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{DD_1})$;

д) $\vec{r_5} = (\overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{B_1C}) - (\overrightarrow{C_1C} - \overrightarrow{C_1D}) - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.

5. Произведение вектора на число. Построение произведения вектора на число

Определение

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, и при этом если $\lambda > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, и если $\lambda = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любых чисел k и l выполняются следующие равенства:

1) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);

2) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (первый распределительный закон);

3) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (второй распределительный закон).

Напомним, что вектор $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ является противоположным вектору $\vec{a}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число λ, что $\lambda\vec{a} = \vec{b}$.

Так, векторы $\vec{q_1} = 5\vec{a}$ и $\vec{q_2} = -7\vec{a}$ коллинеарны. Это значит, что существует такое число λ, что $\lambda\vec{q_1} = \vec{q_2}$. В данном случае нетрудно найти, что число $\lambda = -\frac{7}{5}$.

С Задания для самостоятельной работы

19 Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \ldots, \overrightarrow{p_{15}}$, заданные следующим образом:

1) а) $\vec{p_1} = 2(3\vec{a})$; б) $\vec{p_2} = -3(2a)$; в) $\vec{p_3} = 3\vec{a} + (-\vec{b})$.

2) а) $\vec{p_4} = 2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; б) $\vec{p_5} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; в) $\vec{p_6} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

3) а) $\vec{p_7} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$; б) $\vec{p_8} = 3\vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} - 3\vec{c}$; в) $\vec{p_9} = 2(\vec{a} + \vec{b}) - 3\vec{c}$.

4) а) $\overrightarrow{p_{10}} = 5\vec{a} - 3\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$; б) $\overrightarrow{p_{11}} = 2\vec{a} + 3(\vec{a} - \vec{b})$;

в) $\overrightarrow{p_{12}} = (\vec{a} - 2\vec{b}) + \left(\frac{3\vec{a}}{4} - \vec{b} - \vec{c}\right)$.

5) а) $\overrightarrow{p_{13}} = \left(-\vec{a} - 3\vec{b} - \frac{2\vec{c}}{3}\right) + (2\vec{a} - \vec{b})$;

б) $\overrightarrow{p_{14}} = \left(2\vec{a} - \frac{3\vec{b}}{5}\right) + (3\vec{b} - 2\vec{a}) + \vec{c}$;

в) $\overrightarrow{p_{15}} = (4\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.

6. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами

Пусть векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ — векторы с общим началом в некоторой точке O. Точка O является вершиной угла AOB между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Короче это записывается так: $\angle AOB=\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.

Градусную меру угла AOB обозначим φ. Таким образом, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\varphi$.

Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$. Тогда если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=0°$; если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=180°$; если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=90°$, если $\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{b}=\vec{0}$ или оба вектора нулевые, то будем считать, что $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=0°$.

Определение

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Таким образом, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это число, равное

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}).$$

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k выполняются соотношения:

1) $\vec{a}^2\geqslant 0$, при этом если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}^2>0$.
2) $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$ (переместительный закон),
3) $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$ (распределительный закон),
4) $k\,(\vec{a}\,\vec{b})=(k\vec{a})\,\vec{b}$ (сочетательный закон).

Пример 8. На рёбрах MB, MC, AB и AC правильного тетраэдра $MABC$ взяты точки B_1, C_1, D и E — середины этих рёбер. Считая ребро тетраэдра равным 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB}$ (O — центр грани ABC);

б) $\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}$;

в) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC_1}$;

г) $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BC_1}$.

Решение. а) Так как точка O — центр грани ABC, то отрезок MO — высота заданного тетраэдра (рис. 19, *а*). Поэтому $MO\perp ABC$ и, значит, $MO\perp AB$, тогда и $\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{AB}$, т. е. векторы взаимно перпендикулярны.

Итак, $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{MO}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 90°=0.$

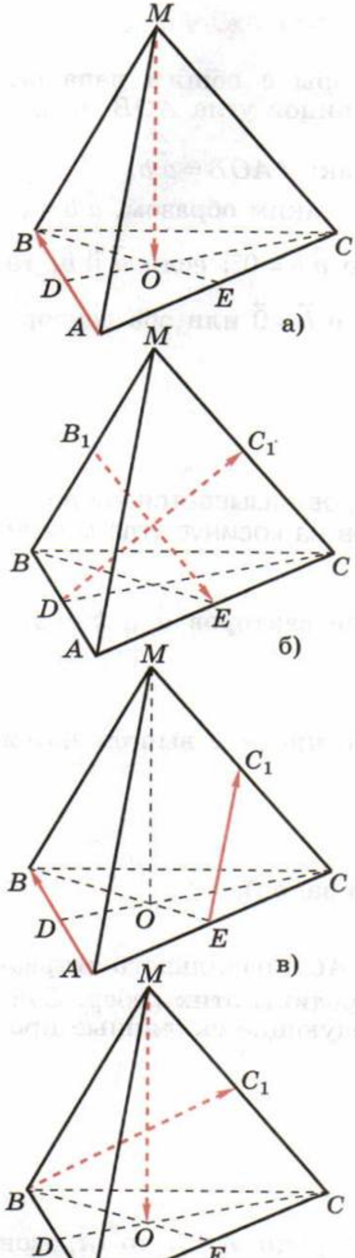


Рис. 19

б) Заметим, что $\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$, а $\overrightarrow{B_1E} = \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_1D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (рис. 19, *б*).

Тогда

$$\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{MA}^2 = \frac{1}{4}(BC^2 - MA^2).$$

Но так как заданный тетраэдр правильный, то $BC = MA$. Таким образом, $\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E} = 0$, т. е. векторы взаимно перпендикулярны.

Замечание. Есть и другие пути вычисления $\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}$. Можно, например, выяснить, что четырёхугольник B_1DEC_1 — ромб, тогда его диагонали взаимно перпендикулярны, т. е. $\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E} = 0$.

в) Построим вектор $\overrightarrow{AA_1}$, концом которого является точка A_1 — середина ребра MA (рис. 19, *в*).

Тогда $\overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{AA_1}$, т. е. $\overrightarrow{EC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Поэтому

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC_1} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AA_1}}) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{4}.$$

г) Построим вектор $\overrightarrow{C_1K}$, концом которого является точка K — середина отрезка OC (рис. 19, *г*). Понятно, что $\overrightarrow{C_1K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$, поэтому $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{C_1K}\cdot\overrightarrow{BC_1} = 2|\overrightarrow{C_1K}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|\cos(\widehat{\overrightarrow{C_1K}\,\overrightarrow{BC_1}})$. Подсчитаем длины векторов и косинус угла между ними. Из правильного треугольника MBC находим $|BC_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В прямоугольном треугольнике C_1KC

$$C_1K = \sqrt{CC_1^2 - CK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}MC\right)^2 - \left(\frac{1}{3}CD\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Далее, в прямоугольном треугольнике BC_1K $\cos\angle BC_1K = \frac{C_1K}{BC_1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$.

Итак, мы находим, что $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

С Задания для самостоятельной работы

20 На рёбрах AA_1, AB, A_1B_1 и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки A_2, E, E_1 и K_1 соответственно — середины этих рёбер. Считая ребро куба равным 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{DK_1} \cdot \overrightarrow{DE}$; б) $\overrightarrow{DK_1} \cdot \overrightarrow{DE_1}$; в) $\overrightarrow{DK_1} \cdot \overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{DK_1} \cdot \overrightarrow{DA_2}$.

21 На рёбрах DD_1, CD и C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки D_2, E и E_1 соответственно — середины этих рёбер. Считая ребро куба равным 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1E_1}$; в) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{D_2E}$; г) $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{OD_1}$ (точка O — центр грани $ABCD$).

22 На рёбрах AB и B_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки D и E_1 соответственно — середины этих рёбер. Считая боковое ребро призмы равным стороне её основания и равным 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{BA_1}$; б) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{CE_1}$; в) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{BE_1}$; г) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{AE_1}$.

23 На рёбрах MB и MC правильной пирамиды $MABCD$, все рёбра которой равны, взяты точки B_1 и C_1 соответственно — середины этих рёбер. Считая высоту пирамиды равной 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{OB_1}$ (O — центр основания); г) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{BC}$.

24 В основании пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$, её боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания и $BA : BM : BC = 1 : 1 : 2$. На рёбрах MC и AD взяты точки C_1 и E соответственно — середины этих рёбер. Считая $AB = 1$, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{EC_1} \cdot \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{EC_1} \cdot \overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{EC_1} \cdot \overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{EC_1} \cdot \overrightarrow{AM}$.

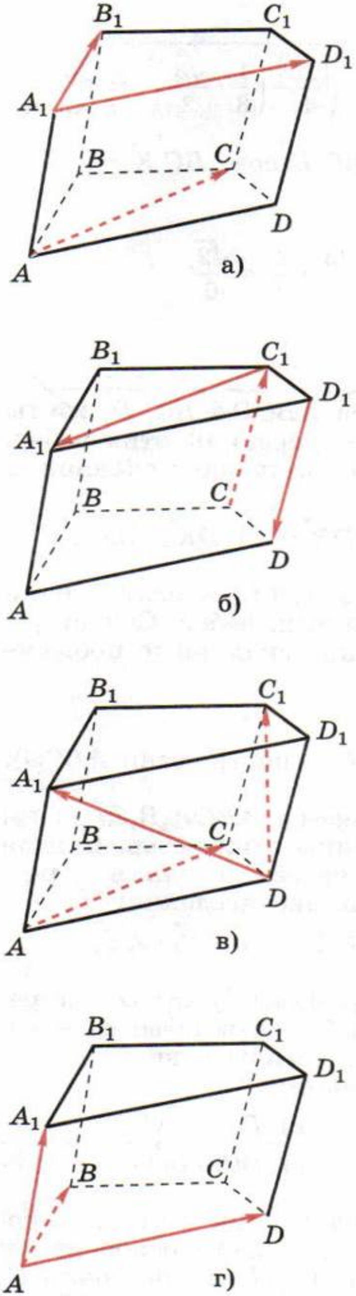


Рис. **20**

7. Компланарные векторы. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

Определение

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной точки они лежат в одной плоскости.

Векторы являются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Так, если многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма, то компланарными являются, например, следующие тройки векторов:

$\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ (рис. 20, *а*) (так как существует плоскость, которой все они параллельны, например плоскость $A_1B_1C_1$);

$\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$ (рис. 20, *б*) (все они параллельны, например, плоскости AA_1C_1);

$\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ (рис. 20, *в*) (все они параллельны, например, плоскости DA_1C_1).

Понятно, что любые два вектора компланарны и существуют тройки некомпланарных векторов. Например, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ (рис. 20, *г*) некомпланарны, так как никакой из этих векторов не принадлежит плоскости, определяемой двумя другими векторами. Некомпланарными являются также следующие тройки векторов: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{BC}$ и т. д.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — данные некомпланарные векторы, а вектор $\vec{p}$ — некоторый вектор пространства. **Разложить вектор $\vec{p}$ по трём некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$** — это значит найти такие числа x, y и z, что выполняется равенство

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Числа x, y и z называются **коэффициентами разложения.**

Теорема

Любой вектор пространства можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Пример 9. Основанием пирамиды $MABCD$ является параллелограмм. На ребре AB пирамиды взята точка E — середина ребра, а на отрезке DE взята точка F — его середина. Разложим вектор $\overrightarrow{MF}$ по векторам $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$.

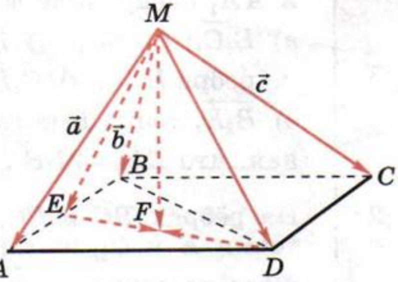


Рис. 21

Решение. Соединим точку M с точками E и F (рис. 21). По правилу треугольника $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DF}$. Складывая эти равенства почленно, найдём, что

$$\overrightarrow{MF}=\frac{\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MD}}{2}.$$

Точно так же находим, что $\overrightarrow{ME}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}{2}$, т. е. $\overrightarrow{ME}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

Так же по правилу треугольника $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}$, т. е. $\overrightarrow{MD}=\vec{b}+\overrightarrow{BD}$, и по правилу параллелограмма $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Но $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, а $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$.

Поэтому $\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{b}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, и, следовательно, $\overrightarrow{MD}=\vec{b}+(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{MF}=\frac{\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MD}}{2}=\frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})}{2}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

C Задания для самостоятельной работы

25 Дана призма $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что компланарны следующие тройки векторов:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$;

б) $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{FC}$, где точка F — точка прямой AB;

г) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$ и $\overrightarrow{DE}$, где точки D и E — середины рёбер AC и BC соответственно;

д) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{D_1E_1}$, где точки D, D_1 и E_1 — середины рёбер AC, A_1C_1 и B_1C_1 соответственно;

е) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{B_2C}$, где точка B_2 такая, что $\overrightarrow{BB_2} = 2\overrightarrow{BB_1}$.

26 Дана призма $ABCA_1B_1C_1$. Разложите по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{BC_1}$; в) $\overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{AE_1}$, точка E_1 которого — середина ребра B_1C_1; д) $\overrightarrow{C_1E}$, точка E которого — середина ребра BC; е) $\overrightarrow{B_2E}$, точка E которого — середина ребра BC, а точка B_2 такая, что $\overrightarrow{BB_2} = 2\overrightarrow{BB_1}$.

27 На рёбрах BC и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки E и C_2 соответственно — середины этих рёбер. Разложите по векторам $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1B}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{B_1E}$; б) $\overrightarrow{C_2E}$; в) $\overrightarrow{A_1E}$; г) $\overrightarrow{AC_2}$; д) $\overrightarrow{A_1C_2}$; е) $\overrightarrow{OC_2}$, где точка O — центр грани ABB_1A_1.

28 В основании пирамиды $MABCD$ лежит параллелограмм, на стороне CD которого взята точка E — её середина. Разложите по векторам $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ следующие векторы:

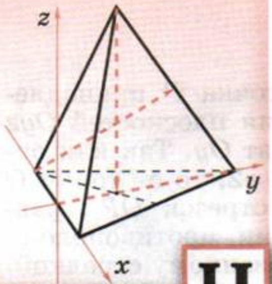
а) $\overrightarrow{MO}$, где O — точка пересечения диагоналей;

б) $\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{ME}$; г) $\overrightarrow{BE}$; д) $\overrightarrow{AE}$;

е) $\overrightarrow{BF}$, где точка F — середина отрезка ME.

29 Медианы BD и CE основания тетраэдра $MABC$ пересекаются в точке O. Разложите по векторам $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{ME}$; б) $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{OE}$; г) $\overrightarrow{MO}$; д) $\overrightarrow{O_1E}$, точка O_1 которого — середина отрезка MO.



Глава II

Координаты точки и координаты вектора в пространстве

8. Координаты точки. Координаты середины отрезка. Длина отрезка

Проведём через какую-нибудь точку O пространства три попарно перпендикулярные прямые (рис. 22). На каждой из них укажем направление (покажем его стрелкой) и выберем некоторый отрезок в качестве единицы измерения.

Совокупность этих трёх прямых с направлениями на них, их общей точкой и единицей измерения отрезков называют **прямоугольной системой координат.**

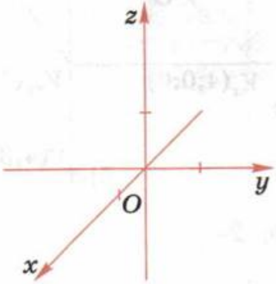


Рис. 22

Точка O — это *начало системы координат*, три указанные прямые с направлением на каждой из них и началом отсчёта — это *оси координат*. Ось, обозначенная Ox, — **ось абсцисс**, Oy — **ось ординат** и Oz — **ось аппликат.**

Три плоскости, определяемые осями координат, взятыми попарно, — это координатные плоскости Oxy, Oyz и Oxz.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства ставится в соответствие *тройка чисел*. Эти числа называют **координатами точки M.**

На рисунке 23 показана точка M. Тройка чисел 2, 3, 5 — это абсцисса, ордината и аппликата точки M соответственно.

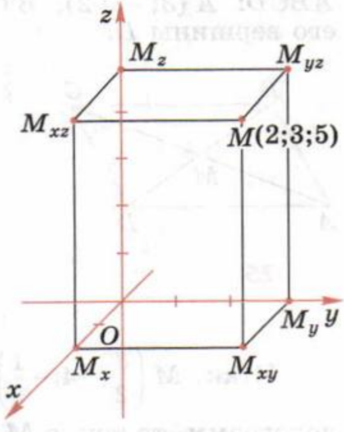


Рис. 23

Пример 10. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ построим следующие точки:

а) $P\,(0; -2; 0)$;

б) $V\,(4; 3; -2)$.

Решение. а) Так как абсцисса точки P равна нулю, то точка P лежит в плоскости Oyz (рис. 24, *а*). Аналогично так как аппликата точки P равна нулю, то точка P лежит в плоскости Oxy.

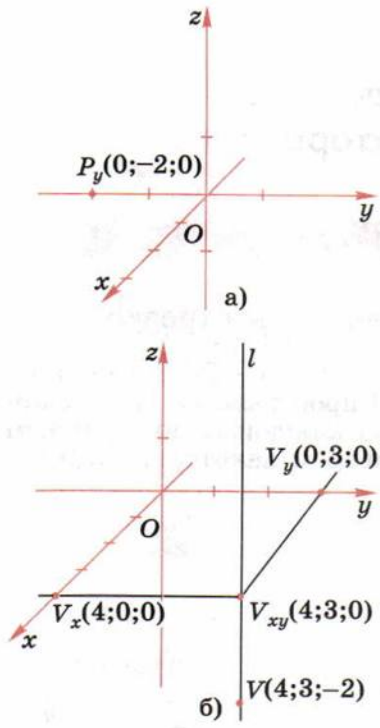


Рис. 24

Таким образом, точка P принадлежит линии пересечения плоскостей Oyz и Oxy, т. е. оси ординат Oy. Так как ордината точки P равна -2, то от точки O отложим на оси Oy отрезок OP_y, равный 2, но в направлении, противоположном направлению, указанному стрелкой. Итак, мы построили точку $P\,(0; -2; 0)$.

б) Построим точку $V_x\,(4; 0; 0)$, затем точку $V_y\,(0; 3; 0)$ (рис. 24, *б*). Далее построим точку $V_{xy}\,(4; 3; 0)$ ($V_xV_{xy} \parallel Oy$, $V_yV_{xy} \parallel Ox$, точка $V_{xy} = V_xV_{xy} \cap V_yV_{xy}$). Проведём через точку V_{xy} прямую $l \parallel Oz$ и на этой прямой от точки V_{xy} отложим отрезок $V_{xy}V$, длина которого равна 2, но направление противоположно направлению, указанному на оси Oz. Таким образом мы построили точку $V\,(4; 3; -2)$.

Координаты точек $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$ и **координаты точки $M\,(x; y; z)$ — середины отрезка AB** связаны следующими равенствами:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}. \end{cases}$$

Пример 11. Заданы координаты трёх вершин параллелограмма $ABCD$: $A\,(3; -7; 2)$, $B\,(1; 4; -8)$ и $C\,(0; -1; -3)$. Найдём координаты его вершины D.

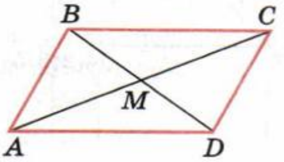


Рис. 25

Решение. Найдём координаты x_m, y_m и z_m точки M — середины отрезка AC (рис. 25). Имеем

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{3 + 0}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_m = \dfrac{-7 - 1}{2} = -4 \\ z_m = \dfrac{2 - 3}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, $M\left(\dfrac{3}{2}; -4; -\dfrac{1}{2}\right)$. Так как четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то точка M является серединой также отрезка BD. Найдём координаты x_D, y_D и z_D точки D.

Имеем $\begin{cases} \dfrac{x_D+1}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y_D+4}{2}=-4, \\ \dfrac{z_D-8}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ откуда $x_D=2$, $y_D=-12$, $z_D=7$.

Таким образом, $D(2; -12; 7)$.

Длина отрезка AB может быть вычислена по формуле

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты точек A и B соответственно.

Пример 12. Определим вид четырёхугольника $ABCD$, вершины которого заданы координатами:

а) $A(1; 2; 0)$, $B(3; -1; 4)$, $C(-2; 0; 5)$, $D(-4; 3; 1)$;

б) $A(-4; 2; 3)$, $B(-1; 5; 3)$, $C(4; 0; 5)$, $D(1; -3; 5)$.

Решение. а) Выясним прежде всего, является ли четырёхугольник $ABCD$ плоским. Найдём, например, координаты точки O_1 — середины отрезка AC. Получим

$$x=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2},\ y=\frac{2+0}{2}=1,\ z=\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}.$$

Найдём теперь координаты точки O_2 — середины отрезка BD:

$$x=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2},\ y=\frac{-1+3}{2}=1,\ z=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Как мы видим, точка O_1 совпадает с точкой O_2, т. е. отрезки AC и BD пересекаются. Это значит, что фигура $ABCD$ плоская. Кроме того, выяснилось, что диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам. Тогда четырёхугольник $ABCD$ по крайней мере является параллелограммом. Выясним далее, не является ли параллелограмм $ABCD$ ромбом. Найдём с этой целью длины каких-нибудь двух смежных сторон параллелограмма. Вычисления дают, например, значения $AB=\sqrt{134}$ и $AD=\sqrt{59}$. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ не ромб. Выясним затем, не является ли он прямоугольником. Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим длины диагоналей AC и BD. Получаем $AC=\sqrt{38}$, $BD=\sqrt{74}$, т. е. $AC \neq BD$. Таким образом, приходим к выводу, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Как и в пункте *а* выясним, что четырёхугольник $ABCD$ плоский и является по крайней мере параллелограммом. Найдём далее, что у него $AB=\sqrt{18}$, $BC=\sqrt{54}$, т. е. $AB \neq BC$, и, значит, этот параллелограмм не является ромбом. Однако $AC=6\sqrt{2}$ и $BD=6\sqrt{2}$, т. е. $AC=BD$. Тогда параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. (Понятно, что квадратом он не является, так как он не ромб.)

Задания для самостоятельной работы

30 С помощью куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задана прямоугольная система координат в пространстве $Oxyz$, оси которой выбраны, как показано на рисунке 26, а в качестве единицы измерения принят отрезок AB.
На рёбрах AA_1, CC_1, AD, CD и A_1B_1 взяты точки A_2, C_2, P, Q и R соответственно — середины этих рёбер. Определите в выбранной системе координат координаты указанных точек, установите вид полученных треугольников и четырёхугольников:

а) A_1C_2P;
б) A_1C_1P;
в) A_2C_1P;
г) C_1PQ;
д) A_2PQ;
е) B_1DA_1;
ж) B_1A_2PQ;
з) A_2RC_2Q;
и) B_1ADC_1;
к) $DC_2B_1A_2$.

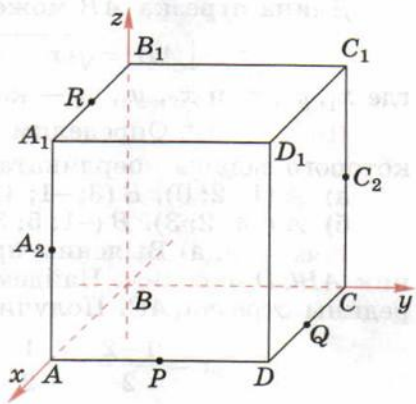


Рис. 26

31 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Высота MO пирамиды проектируется в центр основания и равна меньшей стороне основания. С помощью этой пирамиды задана прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве, оси которой выбраны, как показано на рисунке 27, а в качестве единицы измерения принят отрезок, равный половине меньшей стороны основания. На рёбрах AB, AD, CD, MA и MC взяты точки K, P, V, A_1 и C_1 соответственно — середины этих рёбер, а на высоте MO взята точка O_1 — её середина. Определив в выбранной системе координат координаты указанных точек, установите вид следующих фигур:

а) MPV;
б) MPC;
в) DC_1K;
г) PO_1C_1;
д) PO_1V;
е) PO_1M;
ж) A_1PVC_1;
з) A_1C_1CA;
и) O_1C_1VP.

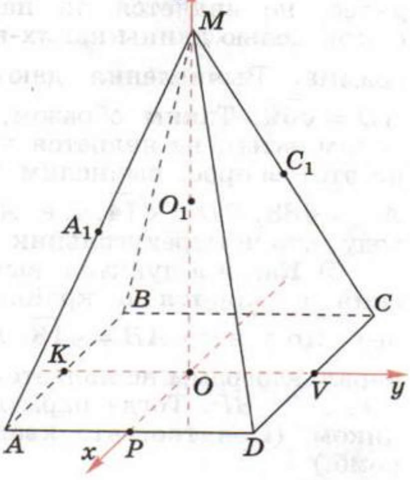


Рис. 27

9. Координаты вектора. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ на каждой из положительных полуосей Ox, Oy и Oz от точки O отложены соответственно векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, такие, что $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

Ясно, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ некомпланарны. Поэтому существует разложение по ним любого вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \qquad (1)$$

Определение

Числа x, y, z в разложении (1) вектора $\overrightarrow{AB}$ по единичным векторам прямоугольной системы координат называют **координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$ в этой системе координат.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, началом которого является точка O — начало прямоугольной системы координат, называют **радиус-вектором** точки M.

Координаты радиус-вектора точки M равны соответственным координатам точки M.

Так, если координатами точки A является тройка чисел $(x_1; y_1; z_1)$, то $\overrightarrow{OA}\,(x_1; y_1; z_1)$. Аналогично если $B\,(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{OB}\,(x_2; y_2; z_2)$.

Пусть $\overrightarrow{AB}\,(x; y; z)$, $A\,(x_1; y_1; z_1)$ и $B\,(x_2; y_2; z_2)$. Тогда $x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $z=z_2-z_1$, т. е.

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k}.$$

Таким образом, координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ в прямоугольной системе координат являются разности x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1, где числа x_1, y_1, z_1 — это координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}$, а числа x_2, y_2, z_2 — координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}$.

Если, например, $A\,(3; -7; 0)$, $B\,(-2; 5; 1)$, то координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ являются числа $x=-2-3=-5$, $y=5-(-7)=12$, $z=1-0=1$, т. е. $\overrightarrow{AB}\,(-5; 12; 1)$.

Суммой $(\vec{a}+\vec{b})$ **векторов** $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ является вектор $\vec{s}\,(x_2+x_1; y_2+y_1; z_2+z_1)$, а **разностью** $(\vec{a}-\vec{b})$ **векторов** $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ является вектор $\vec{r}\,(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-x_1)$.

Если, например, $\vec{a}\,(4; -1; 3)$, $\vec{b}\,(1; 5; 0)$, то $\vec{a}+\vec{b}=\vec{s}\,(5; 4; 3)$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{r}\,(3; -6; 3)$.

Если векторы $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2, y_2; z_2)$ *коллинеарны*, то их соответствующие координаты пропорциональны, т. е. $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$.

Верно и обратное утверждение. Например, векторы $\vec{a}\,(-6; -1; 2)$ и $\vec{b}\left(3; \frac{1}{2}; -1\right)$ коллинеарны, так как $-\frac{6}{3} = -\frac{1}{2} = \frac{2}{-1}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то равны их соответствующие координаты.

Верно и обратное утверждение. Если, например, $\vec{a}\,(2; -3; 4) = \vec{b}\,(x; y; z)$, то $x = 2$, $y = -3$, $z = 4$.

Пример 13. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O — центр грани $ABCD$. Построим прямую l, проходящую через точку A_2 — середину ребра AA_1, параллельно прямой OB_1.

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат. Например, $Bxyz$ с началом в точке B, осями Bx, By и Bz, как показано на рисунке 28, и единицей измерения отрезков, равной ребру куба.

В этой системе координат имеем $B\,(0; 0; 0)$, $A\,(1; 0; 0)$, $C\,(0; 1; 0)$ и $B_1\,(0; 0; 1)$.

Далее $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{OB_1}$. Получаем $\overrightarrow{OB_1}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$. Если искомая прямая l пересекает плоскость ABC, например, в точке K, то $K\,(x; y; z)$. Тогда $\overrightarrow{A_2K} \parallel \overrightarrow{OB_1}$. Так как в заданной системе координат $A_2\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$, то $\overrightarrow{A_2K}\left(x - 1; y; z - \frac{1}{2}\right)$. Запишем условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{A_2K}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ в координатах:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{-\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{1}.$$

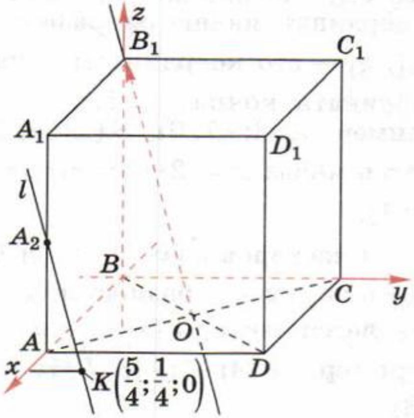


Рис. 28

Так как точка K принадлежит плоскости ABC, то третья координата точки K равна 0, т. е. $z=0$. Таким образом, получаем

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{0-\frac{1}{2}}{1}, \text{ или } \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{1}{4}, \text{ откуда } x=\frac{5}{4},\ y=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $K\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$. Построим точку K по её координатам и затем построим прямую A_2K, которая и является искомой.

Произведением вектора $\vec{a}\,(x; y; z)$ **на число** k является вектор $k\vec{a}\,(kx; ky; kz)$. Так, если $\vec{a}\,(-1; 3; 6)$ и $k=-2$, то $k\vec{a}\,(2; -6; -12)$.

Пример 14. Точка O — центр грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — принята за начало прямоугольной системы координат $Oxyz$. Прямые OD, OC и OO_1 с направлениями на них, выбранными так, как показано на рисунке 29, приняты за координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно. В качестве единицы измерения отрезков принят отрезок OD.

Найдём в системе координат $Oxyz$ координаты следующих векторов:

а) $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$;

б) $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AC_2}$, где точка C_2 — середина ребра CC_1;

в) $\vec{s}_1=\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{BC_1}$, $\vec{s}_2=3\overrightarrow{A_1C_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D}$, $\vec{s}_3=\overrightarrow{BO_1}-(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CC_1})$.

Решение. В заданной системе координат имеем $O(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$. Далее из прямоугольного треугольника OCD, в котором $OC=OD=1$, находим $CD=\sqrt{2}$. Тогда $OO_1=\sqrt{2}$ и $O_1(0; 0; \sqrt{2})$.

а) Найдём теперь и вычислим координаты векторов $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Все они являются радиус-векторами точек O_1, A и B соответст-

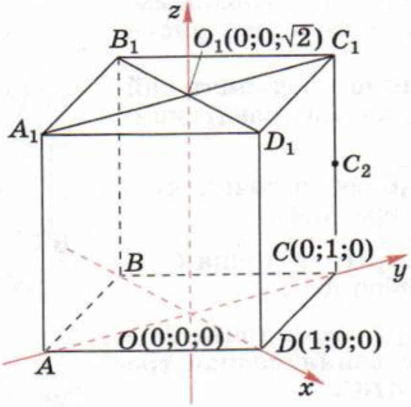


Рис. 29

венно. Тогда $\overrightarrow{OO_1}\,(0; 0; \sqrt{2})$. Так как $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$, то $\overrightarrow{OA}\,(0; -1; 0)$. Аналогично $\overrightarrow{OB}\,(-1; 0; 0)$.

б) Итак, $A\,(0; -1; 0)$. Находим, что $B_1(-1; 0; \sqrt{2})$. Тогда $\overrightarrow{AB_1}(-1; 1; \sqrt{2})$. Вычислив затем, что $C_1(0; 1; \sqrt{2})$, $C_2\left(0; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, получим $\overrightarrow{AC_1}(0; 2; \sqrt{2})$, $\overrightarrow{AC_2}\left(0; 2; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

в) Так как $B\,(-1; 0; 0)$ и $C_1\,(0; 1; \sqrt{2})$, то $\overrightarrow{BC_1}\,(1; 1; \sqrt{2})$. Аналогично так как $O_1\,(0; 0; \sqrt{2})$ и $A\,(0; -1; 0)$, то $\overrightarrow{AO_1}\,(0; 1; \sqrt{2})$. Тогда так как $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{BC_1}$, то $\vec{s}_1\,(1; 2; 2\sqrt{2})$.

Вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$ равен вектору $\overrightarrow{AC}$. Поэтому равны и их координаты. Но $\overrightarrow{AC}\,(0; 2; 0)$. Значит, и $\overrightarrow{A_1C_1}\,(0; 2; 0)$, а вектор $3\overrightarrow{A_1C_1}$ имеет координаты $(0; 6; 0)$. Так как далее $B_1(-1; 0; \sqrt{2})$, а $D\,(1; 0; 0)$, то $\overrightarrow{B_1D}\,(2; 0; -\sqrt{2})$, и, значит, $\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D}\left(1; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Тогда $\vec{s}_2\left(1; 6; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Определим теперь координаты вектора $\vec{s}_3$. Находим для этого $\overrightarrow{BO_1}\,(1; 0; \sqrt{2})$, $\overrightarrow{OD}\,(1; 0; 0)$, $\overrightarrow{CC_1}\,(0; 0; \sqrt{2})$. Тогда вектор $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CC_1}$ имеет координаты $(1; 0; \sqrt{2})$. Поэтому $\vec{s}_3 = \overrightarrow{BO_1} - (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CC_1}) = \vec{0}$.

C Задания для самостоятельной работы

32 В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник, а её боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания. Отношение рёбер $AB : MB$ равно $2:1$. Примите отрезок, равный ребру AB, за единицу измерения в прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в точке O — середине ребра AB и осями координат, выбранными так, как показано на рисунке 30.

В этой системе координат найдите координаты следующих векторов:

а) $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{A_1C}$, если точка A_1 — середина ребра MA;

б) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$, если точка C_1 — середина ребра MC;

в) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{C_1P}$, если точка P — точка пересечения медиан треугольника ABC.

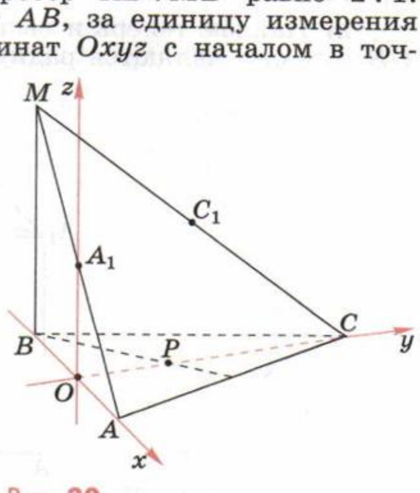


Рис. 30

33 В основании пирамиды $MABCD$ лежит треугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 3$. Высота MO пирамиды проектируется в точку O — центр основания и $MO = \frac{1}{2}AC$.

Точку O примите за начало прямоугольной системы координат $Oxyz$, оси которой выбраны, как показано на рисунке 31 (точка K — середина ребра AD, а точка F — середина ребра CD), а в качестве единицы измерения выбран отрезок, равный AB. Точки B_1, C_1 и P — середины соответственно отрезков MB, MC и AO. В этой системе координат найдите координаты следующих векторов:

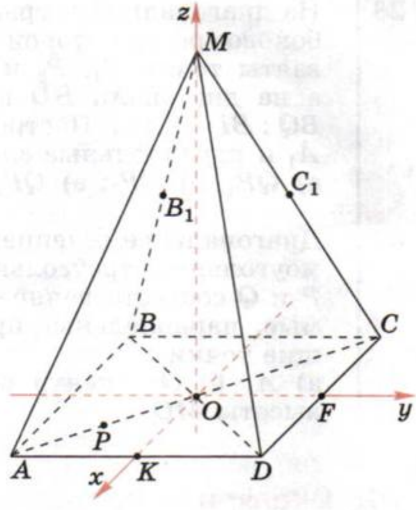


Рис. 31

а) $\overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$; б) $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{B_1P}$.

34 На рёбрах AD, A_1B_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q и C_2 соответственно — середины этих рёбер. Примите отрезок, равный ребру куба, за единицу измерения в прямоугольной системе координат $Oxyz$, заданной, как показано на рисунке 32. Найдите в этой системе координаты следующих векторов:

а) $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{B_1C_2}$ и $\overrightarrow{C_2P}$;

б) $\vec{s}_1 = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{B_1D}$, $\vec{v}_1 = 2\overrightarrow{OQ} - 3\overrightarrow{OC_2}$;

в) $\vec{s}_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1} + 3\overrightarrow{A_1C}$, $\vec{r}_2 = 2\overrightarrow{B_1O} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1D}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{B_1D} + \overrightarrow{PQ}$.

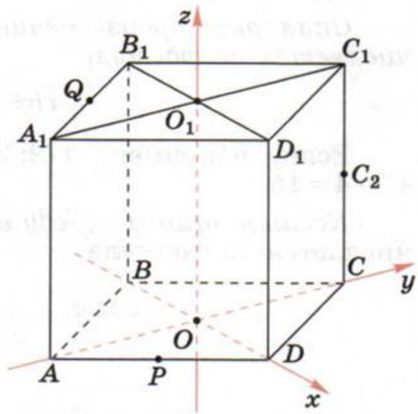


Рис. 32

35 В грани ABB_1A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K — центр этой грани. Постройте прямые, параллельные прямой D_1K и проходящие через следующие точки:
а) A; б) C_2 — середину ребра CC_1, в) O — центр грани $ABCD$.

36 На диагонали C_1D грани правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковое ребро которой в два раза больше стороны её основания, взяты точки P_1, P_2 и P_3, такие, что $C_1P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3D$, а на диагонали BD грани $ABCD$ взята такая точка O, что $BQ : BD = 1 : 4$. Постройте прямые, проходящие через точку A_1 и параллельные следующим прямым:
а) QP_1; б) QP_2; в) QP_3.

37 Диагональное сечение правильной пирамиды $MABCD$ — прямоугольный треугольник. На рёбрах AD и MC взяты точки P и Q соответственно — середины этих рёбер. Постройте прямые, параллельные прямой PQ и проходящие через следующие точки:
а) A; б) O — центр основания пирамиды; в) O_1 — середину высоты MO.

10. Скалярное произведение векторов

Пусть $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — несонаправленные векторы. Тогда лучи OA и OB образуют угол. Градусная мера этого угла является градусной мерой угла между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Если $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OB}$, то считается, что $\widehat{\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}}$ — угол между этими векторами — равен $0°$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Если, например, $\vec{a}\,(2; 3; 7)$, $\vec{b}\,(1; -5; 4)$, то $\vec{a}\,\vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + 7 \cdot 4 = 15$.

Косинус угла φ между векторами $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Так, если $\vec{a}(3; 1; 0)$, $\vec{b}(2; 4; -10)$, то $\cos\varphi = \dfrac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-10)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{4+16+100}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Пример 15. На рёбрах MB, MC, AB и AC правильного тетраэдра $MABC$ взяты точки B_1, C_1, D и E соответственно — середины этих рёбер. Считая ребро тетраэдра равным 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AB}$ (O — центр грани ABC); б) $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{B_1E}$; в) $\overrightarrow{EC_1} \cdot \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{MO}$.

Решение. а) Зададим в пространстве прямоугольную систему координат. Например, систему $Dxyz$, как показано на рисунке 33, a, с началом в точке D и единицей измерения отрезков, равной $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

Найдём в этой системе координаты точек A, B, C, O и M.

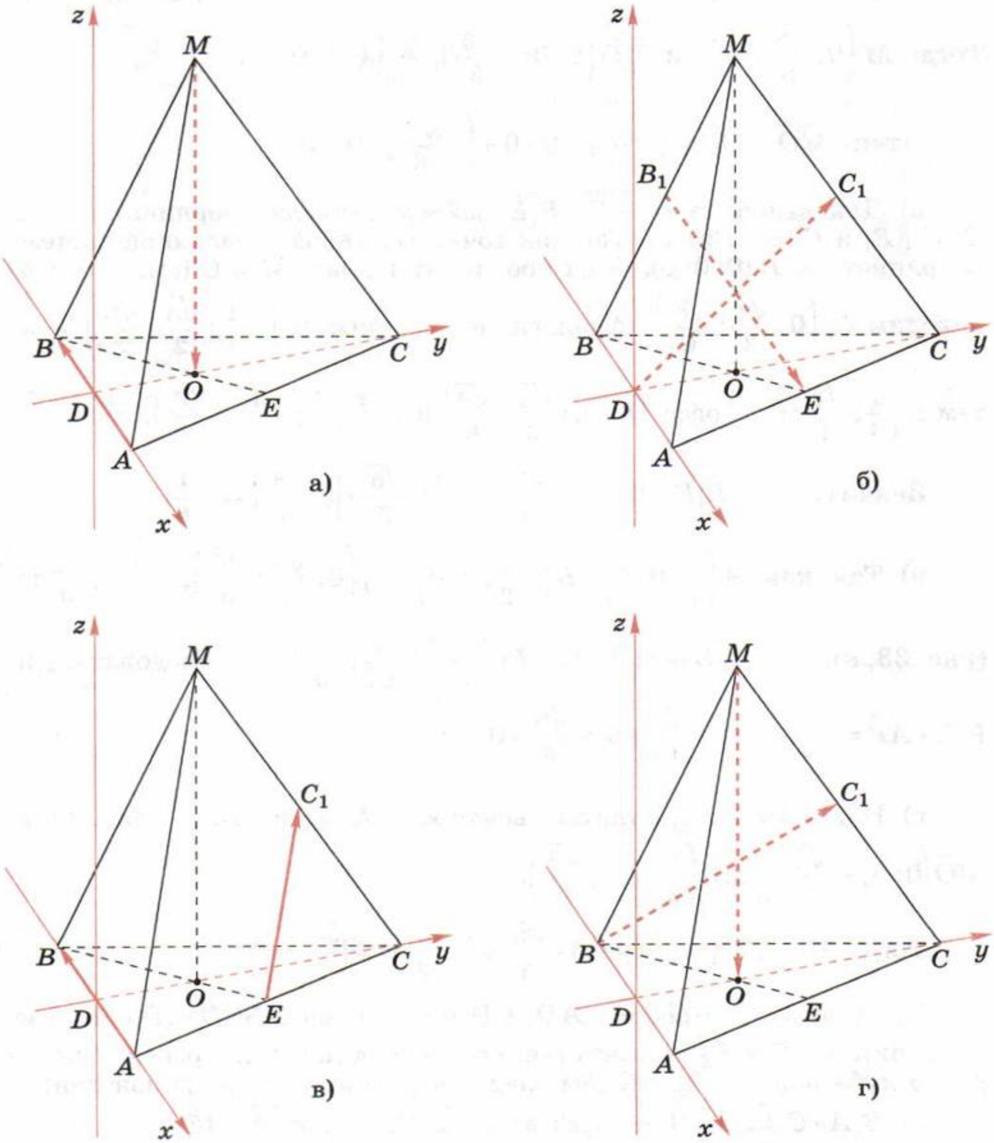


Рис. 33

Получаем $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $O\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$. Далее с помощью прямоугольного треугольника MOD, в котором $OD=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$, находим $OM=\sqrt{MD^2-OD^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{3}{36}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Тогда $M\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ и $\overrightarrow{MO}\left(0;0;-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AB}(-1;0;0)$.

Итак, $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB}=0\cdot(-1)+0\cdot 0+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cdot 0=0$.

б) Для вычисления $\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}$ найдём сначала координаты точек D, C_1, B_1 и E (рис. 33, *б*). Так как точка D — начало заданной системы координат, то $D(0;0;0)$. Зная координаты точек M и C (см. пункт *а*), находим $C_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$. Аналогично находим $B_1\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ и затем $E\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$. Тогда $\overrightarrow{DC_1}\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ и $\overrightarrow{B_1E}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Значит, $\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-\frac{1}{6}$.

в) Так как $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $E\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$ (рис. 33, *в*), то $\overrightarrow{AB}(-1;0;0)$, $\overrightarrow{EC_1}\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{12};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ и, следовательно, $\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 0+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot 0=\frac{1}{4}$.

г) Находим координаты векторов $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ (рис. 33, *г*): $\overrightarrow{MO}\left(0;0;-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{BC_1}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

Тогда $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=-\frac{1}{3}$.

Пример 16. На рёбрах AD, CD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки E, F и C_2 соответственно — середины этих рёбер. Считая ребро куба равным 1, найдём следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{C_2B}$; б) $\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{C_2E}$; в) $\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{C_2F}$; г) $\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{BE}$.

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Bxyz$ с началом в вершине B куба, осями координат Bx, By

и Bz, как показано на рисунке 34, и единицей измерения, равной ребру куба.

В этой системе координат имеем $B(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(0; 0; 1)$. Найдём теперь искомые произведения.

а) Имеем $\overrightarrow{B_1A}(1; 0; -1)$, и так как точка C_2 — середина отрезка CC_1, то $C_2\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$. Тогда $\overrightarrow{C_2B}\left(0; -1; \frac{1}{2}\right)$, а значит, $\overrightarrow{B_1A} \cdot \overrightarrow{C_2B} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

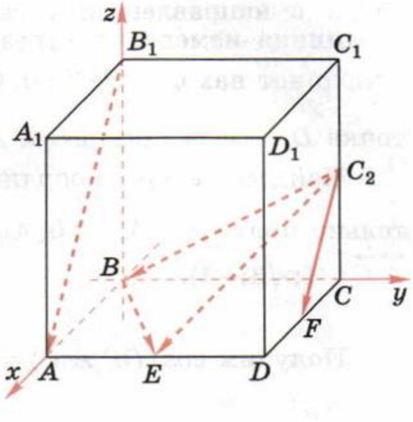


Рис. 34

б) Так как E — середина отрезка AD, то $E\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$. Тогда $\overrightarrow{C_2E}\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Значит, $\overrightarrow{B_1A} \cdot \overrightarrow{C_2E} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

в) Уже известно, что $C_2\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$. Так как точка F — середина отрезка CD, то $F\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$. Тогда $\overrightarrow{C_2F}\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$, и, значит, $\overrightarrow{B_1A} \cdot \overrightarrow{C_2F} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

г) Получаем $\overrightarrow{BE}\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, и тогда $\overrightarrow{B_1A} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot 0 = 1$.

Пример 17. Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны её основания. На рёбрах AB и A_1C_1 взяты точки D и P соответственно — середины этих рёбер. Найдём угол между векторами $\overrightarrow{DP}$ и $\overrightarrow{A_1C}$.

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат, например, $Dxyz$, оси Dx, Dy и Dz ко-

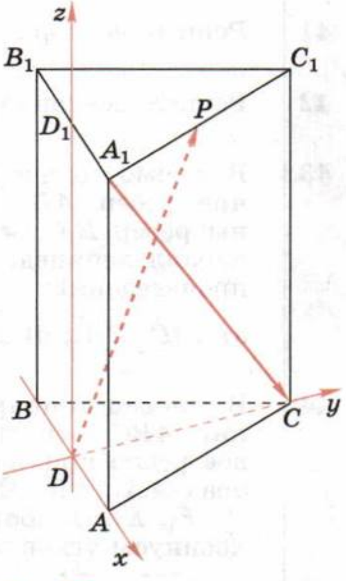


Рис. 35

торой с направлениями выбраны, как показано на рисунке 35, а единица измерения отрезков равна отрезку AD. В этой системе координат находим $D(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $C(0; \sqrt{3}; 0)$, $D_1(0; 0; 4)$, где точка D_1 — середина ребра A_1B_1.

Найдём теперь координаты векторов $\overrightarrow{DP}$ и $\overrightarrow{A_1C}$. Последовательно получаем $A_1(1; 0; 4)$, $C_1(0; \sqrt{3}; 4)$, $P\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{DP}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{A_1C}(-1; \sqrt{3}; -4)$.

Получим $\cos(\widehat{\overrightarrow{DP}\ \overrightarrow{A_1C}}) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} + 4\cdot(-4)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 16}\cdot\sqrt{1+3+16}} = -\dfrac{3\sqrt{85}}{34}$.

Задания для самостоятельной работы

38 Решите векторно-координатным способом задание 20.

39 Решите векторно-координатным способом задание 21.

40 Решите векторно-координатным способом задание 22.

41 Решите векторно-координатным способом задание 23.

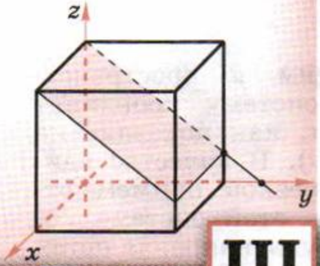
42 Решите векторно-координатным способом задание 24.

43 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отношение рёбер $AB : AA_1 : AD = 2 : 1 : 3$. Точки F и E — середины рёбер B_1C_1 и CD соответственно. Считая меньшее ребро параллелепипеда равным 1, найдите следующие скалярные произведения:

а) $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{BA_1}$; б) $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{C_1E}$; в) $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{FB}$; г) $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{FE}$.

44 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник ABC, отношение катетов которого $AC : BC = 1 : 2$. Боковое ребро призмы равно большей стороне основания. На рёбрах AA_1, BB_1, CC_1, B_1C_1, A_1B_1, AC и AB взяты точки A_2, B_2, C_2, F_1, E и D соответственно — середины этих рёбер. Найдите косинусы углов между следующими векторами:

а) $\overrightarrow{C_1A_2}$ и $\overrightarrow{BE}$; б) $\overrightarrow{C_1A_2}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{C_1A_2}$ и $\overrightarrow{BC_2}$; г) $\overrightarrow{C_1A_2}$ и $\overrightarrow{BF_1}$.



Глава **III**

Векторно-координатный метод решения задач

11. Вычисление угла между прямыми

Определение

Ненулевой вектор называется **направляющим вектором** данной прямой, если он параллелен ей или если он лежит на ней.

Понятно, что если вектор $\vec{a}$ является направляющим вектором прямой p, то всякий вектор $\lambda\vec{a}$, где $\lambda \neq 0$, также является направляющим вектором прямой p. Так, направляющим вектором прямой B_1D, проходящей через вершины B_1 и D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 36), является, например, вектор $\overrightarrow{B_2O}$ (точки B и O — середины отрезков BB_1 и BD соответственно). Также направляющим вектором прямой B_1D является вектор $\overrightarrow{DB_1}$. Однако вектор $\overrightarrow{D_1C}$ (на рисунке 36 он кажется параллельным прямой B_1D) направляющим вектором прямой B_1D не является. (Действительно, так как проекцией B_1D на плоскость C_1CD является прямая C_1D, причём $C_1D \perp CD_1$, то и $B_1D \perp CD_1$).

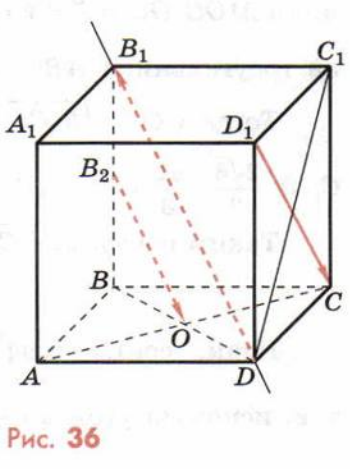


Рис. 36

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются направляющими векторами прямых p и q соответственно (рис. 37), то $\cos(\widehat{p\,q}) = |\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})|$.

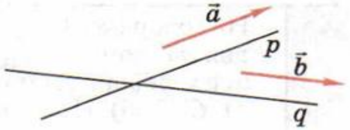


Рис. 37

Пример 18. На рёбрах AB, AC и MC правильной пирамиды $MABC$ взяты точки D, E и C соответственно — середины этих рёбер. Считая боковое ребро пирамиды равным стороне её основания, найдём угол φ между прямыми DC_1 и ME.

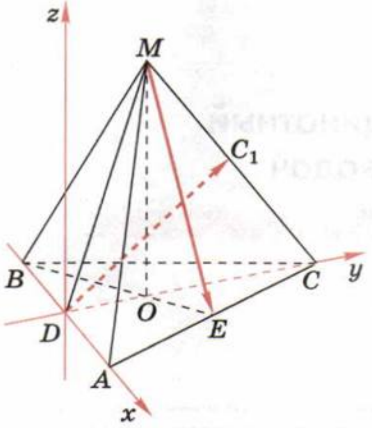


Рис. 38

Решение. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Dxyz$, например, так, как показано на рисунке 38 ($Dz \parallel MO$). В качестве единицы измерения отрезков примем отрезок DA. Найдём в этой системе координаты каких-нибудь направляющих векторов прямых DC_1 и ME, например векторов $\overrightarrow{D_1C}$ и $\overrightarrow{ME}$.

Для этого находим координаты точек D, C_1, M и E. Получаем последовательно $D(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $C(0; \sqrt{3}; 0)$, $E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Чтобы найти координаты точки M, отметим, что в прямоугольном треугольнике MOC $OC = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (так как точка O — точка пересечения медиан треугольника ABC) и $MC = AB = 2$.

Тогда $MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ и, следовательно, $M\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $C_1\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Таким образом, $\overrightarrow{DC_1}\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Итак, $\cos\varphi = |\cos(\widehat{\overrightarrow{DC_1}\,\overrightarrow{ME}})| = \dfrac{\left|0\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}+\frac{6}{9}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{36}+\frac{24}{9}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, т. е. искомый угол $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

C Задания для самостоятельной работы

45 На рёбрах AA_1, A_1B_1, B_1C_1, CC_1 и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки A_2, P_1, Q_1, C_2 и V соответственно — середины этих рёбер. Найдите угол между прямой B_1D и прямой:
а) C_2V; б) C_2P_1; в) A_2C; г) A_2Q_1; д) CQ_1; е) P_1V.

46 На рёбрах AA_1, B_1C_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB : BC : BB_1 = 1 : 1 : 2$, взяты точки A_2, P и Q соответственно — середины этих рёбер. Найдите угол между прямой A_2P и прямой:
а) C_1D; б) B_1D; в) B_1Q; г) B_1D_1; д) B_1C; е) AD_1.

47 Все боковые грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадраты. На её рёбрах AA_1 и BB_1 взяты точки A_2 и B_2 соответственно — середины этих рёбер, а в грани ACC_1A_1 взята точка F — центр этой грани. Найдите угол между прямой BF и прямой:
а) AA_1; б) CD; в) DB_1; г) DC_1; д) A_2C_1; е) B_2C_1.

48 Высота MO правильной пирамиды $MABC$ равна медиане её основания. На рёбрах AB, BC и AC взяты точки D, E и C_1 соответственно — середины этих рёбер. Найдите угол между прямой BC_1 и прямой:
а) CD; б) AE; в) MO; г) MD; д) AC; е) MA.

49 Высота MO правильной пирамиды $MABCD$ равна диагонали её основания. На рёбрах MA, MB и MC взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно — середины этих рёбер. Найдите углы между прямой A_1C и прямой:
а) BC_1; б) OB_1; в) DC_1; г) MD; д) MB; е) AB_1.

50 В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат, а её боковое ребро MC перпендикулярно к плоскости основания и равно стороне основания. На рёбрах AB, CD, MB и MD взяты точки P, E, B_1 и D_1 соответственно — середины этих рёбер. Найдите угол между прямой B_1E и прямой:
а) BD_1; б) AD; в) CD_1; г) D_1P; д) MA; е) MD.

51 Правильные пирамиды M_1ABC и M_2ADC имеют общее ребро AC и высоты M_1O_1 и M_2O_2, равные стороне основания. Точки B и D лежат в плоскости ABC по разные стороны относительно прямой AC. Точки D_1 и P — середины рёбер M_2D и AD соответственно. Найдите угол между прямой BM_2 и прямой:
а) AC; б) AO_1; в) AO_2, г) M_1A; д) D_1P; е) D_1A.

12. Нормальный вектор плоскости. Вычисление угла между прямой и плоскостью

Определение

Ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к плоскости α, называют **нормальным вектором** плоскости α.

Если, например, точки P и Q лежат на боковом ребре прямой призмы, то вектор $\overrightarrow{PQ}$ является нормальным вектором плоскости основания призмы.

Если известны координаты трёх не лежащих на одной прямой точек, например, $A\,(x_1; y_1; z_1)$, $B\,(x_2; y_2; z_2)$ и $C\,(x_3; y_3; z_3)$, то координаты $(k; l; m)$ какого-нибудь нормального вектора $\vec{n}$ плоскости ABC

можно найти, если воспользоваться условием перпендикулярности прямой и плоскости. А именно: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым плоскости α, то она перпендикулярна к плоскости α. В соответствии с этим признаком, если, например, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$, то $\vec{n} \perp ABC$.

Найдём, например, какой-нибудь нормальный вектор плоскости α, проходящий через точки $A\,(3; 2; -1)$, $B\,(0; 4; 3)$ и $C\,(-4; 1; 5)$.

Пусть тройка чисел $(k; l; m)$ — это координаты вектора $\vec{n} \perp \alpha$. Тогда $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{BC}$, и так как $\overrightarrow{AB}\,(-3; 2; 4)$, $\overrightarrow{BC}\,(-4; -3; 2)$, то

$$\begin{cases} k \cdot (-3) + l \cdot 2 + m \cdot 4 = 0 \\ k \cdot (-4) + l \cdot (-3) + m \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Полагая в этой системе, например, $k = 1$, найдём $m = \frac{17}{16}$, $l = -\frac{5}{8}$. Таким образом, вектор $\vec{n}\left(1; -\frac{5}{8}; \frac{17}{16}\right)$ является нормальным вектором заданной плоскости α. Отметим, что вектор $\vec{n_1}\,(16; -10; 17)$, коллинеарный вектору $\vec{n}$ $(\vec{n_1} = 16\vec{n})$, является нормальным вектором этой плоскости α.

Пример 19. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением рёбер $AB : BC = 1 : 2$. Боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания и равно меньшей стороне основания. На рёбрах AB, AD и MC взяты точки P, Q и C_1 соответственно — середины этих рёбер. Найдём координаты вектора $\vec{n}$ — нормального вектора плоскости λ, проходящей через точки P, Q и C_1.

Решение. Рёбра AB, BC и MB заданной пирамиды попарно перпендикулярны. Воспользуемся этим для задания прямоугольной системы координат $Bxyz$. Оси этой системы выберем, как показано на рисунке 39. В качестве единицы измерения отрезков примем, например, отрезок, равный ребру AB. В этой системе координат имеем $B\,(0; 0; 0)$, $A\,(1; 0; 0)$, $C\,(0; 2; 0)$ и $M\,(0; 0; 1)$.

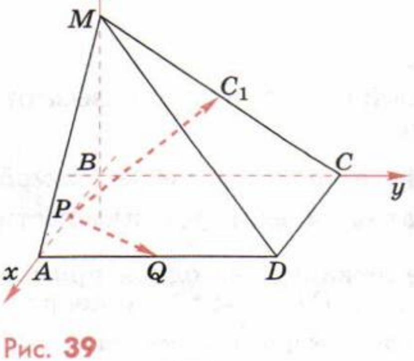


Рис. 39

Перейдём теперь к вычислению координат какого-нибудь вектора $\vec{n}$ — нормального вектора плоскости α. Так как $\vec{n} \perp \alpha$, то вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору, начало и конец которого лежат в плоскости α. Например, $\vec{n} \perp \overrightarrow{PQ}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{PC_1}$. Тогда

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC_1} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PC_1}$. Для этого находим координаты точек P, Q и C_1. Получаем $P\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $Q(1; 1; 0)$ и $C_1\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$. Тогда $\overrightarrow{PQ}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ и $\overrightarrow{PC_1}\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$. Полагая теперь координаты вектора $\vec{n}$ равными $(k; l; m)$, от системы уравнений (1) переходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} k \cdot \frac{1}{2} + l \cdot 1 + m \cdot 0 = 0 \\ k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + l \cdot 1 + m \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим решение с точностью до множителя пропорциональности, например $k = -2$, $l = 1$, $m = -4$. Таким образом, $\vec{n}(-2; 1; -4)$.

Замечание. Понятно, что вместо вектора $\overrightarrow{PQ}$ можно взять любой коллинеарный ему вектор, например вектор $2\overrightarrow{PQ}(1; 2; 0)$. Аналогично вместо вектора $\overrightarrow{PC_1}$ можно взять, например, вектор $2\overrightarrow{PC_1}(-1; 2; 1)$. Тогда координаты вектора $\vec{n}$ будем находить из такой системы уравнений:

$$\begin{cases} k \cdot 1 + l \cdot 2 + m \cdot 0 = 0 \\ k \cdot (-1) + l \cdot 2 + m \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Определение

Если прямая p пересекает плоскость α и не перпендикулярна к ней, то **углом между прямой p и плоскостью α** называется угол между прямой p и её проекцией на плоскость α.

Если прямая p перпендикулярна плоскости α, то угол между прямой p и плоскостью α равен $90°$; если прямая p параллельна плоскости α, то угол между ними считается равным $0°$.

Пусть прямая p пересекает плоскость α в точке D и не перпендикулярна к плоскости α (рис. 40). Из какой-нибудь точки T прямой p опустим перпендикуляр TT' на плоскость α. Прямая DT' — это проекция прямой p на плоскость α. Тогда угол между прямыми p и DT' — это угол между прямой p и плоскостью α.

Пусть $\angle TDT' = \varphi$. Тогда $\angle DTT' = 90° - \varphi$. Значит, и угол между прямыми p и q равен $90° - \varphi$.

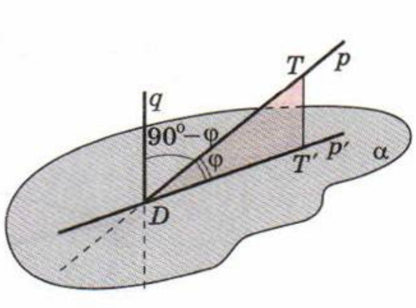


Рис. 40

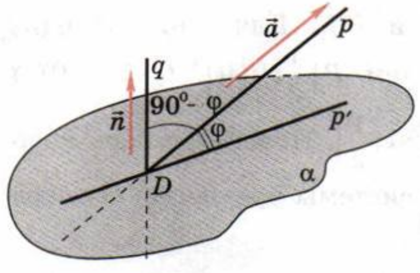


Рис. 41

Чтобы найти угол между прямыми, нужно найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коллинеарными прямым p и q соответственно. И далее по формуле $\cos(\widehat{p\,q}) = |\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})|$ найти $\cos(\widehat{p\,q})$, а затем угол между прямыми p и q.

Заметим, что так как $q \perp \alpha$, то вектор $\vec{n}$, коллинеарный прямой q, также перпендикулярен к плоскости α, т. е. является её нормальным вектором.

Итак, $\cos(\widehat{p\,q}) = |\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{n}})|$ (рис. 41). Но $\widehat{p\,q} = 90° - \varphi$, а $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$. Следовательно, $\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{n}})|$. Таким образом,

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{n}})| = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ — координаты какого-нибудь направляющего вектора прямой p и какого-нибудь нормального вектора плоскости α соответственно.

Пример 20. На рёбрах AB и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P и C_2 соответственно — середины этих рёбер. Найдём угол φ между прямой A_1C и плоскостью α, проходящей через точки P, D и C_2.

Решение. Построим сечение куба плоскостью α — четырёхугольник PB_2C_2D (рис. 42), где прямая DP — основной след плоскости α, $DP \cap BC = S$, прямая SC_2 — след плоскости α на плоскости B_1BC.

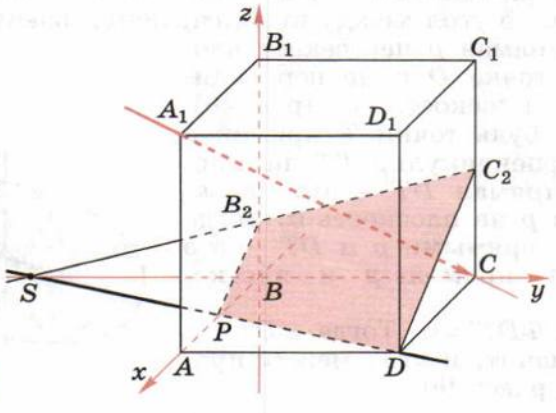


Рис. 42

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат, например, $Bxyz$, как показано на рисунке 42. В качестве единицы измерения отрезков выберем отрезок, равный AB. В этой системе координат $B\,(0;\,0;\,0)$, $A\,(1;\,0;\,0)$, $C\,(0;\,1;\,0)$ и $B_1\,(0;\,0;\,1)$. Найдём далее координаты вектора $\overrightarrow{A_1C}$. Получаем $A_1\,(1;\,0;\,1)$, и, значит, $\overrightarrow{A_1C}\,(-1;\,1;\,-1)$. Этот вектор является направляющим вектором прямой A_1C.

Чтобы найти координаты какого-нибудь нормального вектора $\vec{n}$ плоскости α, вычислим сначала координаты каких-нибудь двух векторов, коллинеарных плоскости α, но не коллинеарных между собой. В качестве этих векторов можно взять, например, векторы $\overrightarrow{PD}$ и $\overrightarrow{C_2D}$. Получаем последовательно $P\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $D\,(1;\,1;\,0)$ и $C_2\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{PD}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ и $\overrightarrow{C_2D}\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)$. Так как $\vec{n}\perp\alpha$, то $\vec{n}\perp\overrightarrow{PD}$ и $\vec{n}\perp\overrightarrow{C_2D}$, т. е. $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0.\end{cases}$

Полагая координаты вектора $\vec{n}$ равными $(k;\,l;\,m)$, получим систему двух уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases}k\cdot\frac{1}{2}+l\cdot 1+m\cdot 0=0\\ k\cdot 1+l\cdot 0+m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}k+2l=0\\ 2k-m=0.\end{cases}$$

Приняв, например, $l=1$, находим $k=-2$, $m=-4$. Таким образом, $\vec{n}\,(-2;\,1;\,-4)$. Итак, в качестве направляющего вектора прямой A_1C мы возьмём вектор $A_1C\,(-1;\,1;\,-1)$, а в качестве нормального вектора плоскости α вектор $\vec{n}\,(-2;\,1;\,-4)$. Теперь находим

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\overrightarrow{A_1C}\,\vec{n}})|=\frac{|(-1)\cdot(-2)+1\cdot 1+(-1)\cdot(-4)|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Итак, искомый угол φ между прямой A_1C и плоскостью α равен $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

52 Приняв ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за единицу измерения, задайте прямоугольную систему координат в пространстве. Сделайте это сначала, как показано на рисунке 43, *а* ($Bxyz$), потом — как на рисунке 43, *б* (C_1xyz), и затем — как на рисунке 43, *в* ($Qxyz$, где Q — середина ребра A_1B, $Qx \parallel A_1D_1$, $Qz \parallel AA_1$). В указанных системах координат найдите координаты какого-нибудь нормального вектора плоскости:
а) A_1BC;
б) A_2D_1C, где точка A_2 — середина ребра AA_1;
в) D_2CP, где точки D_2 и P — середины рёбер DD_1 и AD соответственно.

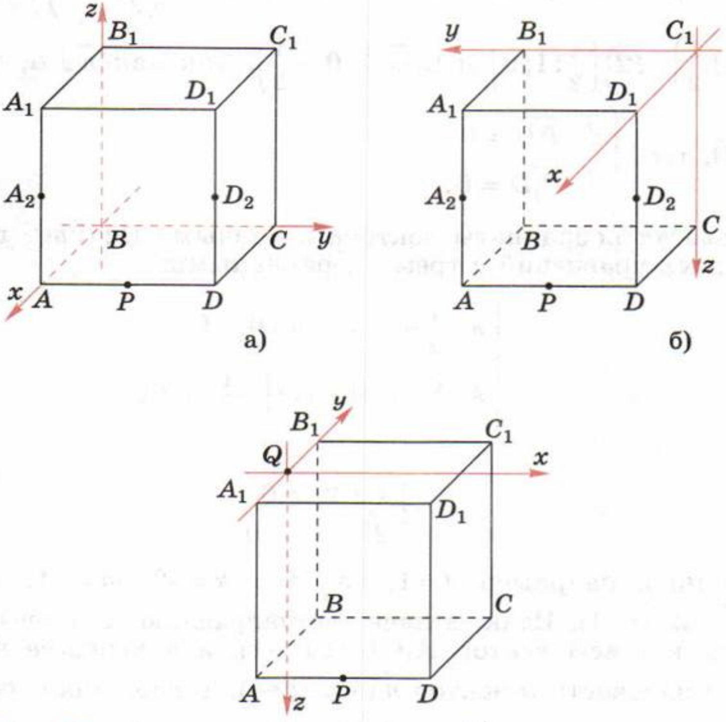


Рис. 43

53 Отношение бокового ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ к стороне её основания равно 3 : 2. Приняв отрезок, равный половине стороны основания, за единицу измерения, задайте прямоугольную систему координат в пространстве. Сделайте это сначала, как показано на рисунке 44, *а* ($Dxyz$, где точка D — середина ребра AB, $Dx \parallel AA_1$), потом — как на

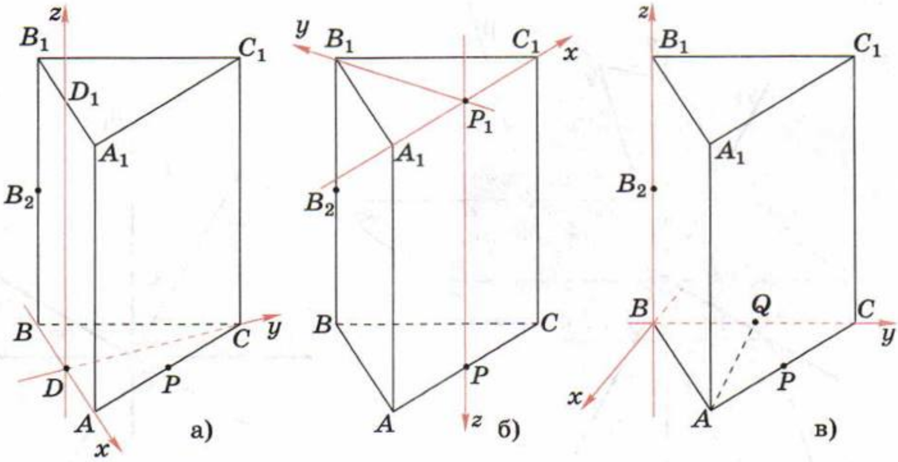


Рис. 44

рисунке 44, *б* (P_1xyz, где точка P_1 — середина ребра A_1C_1, $P_1z \parallel AA_1$), и затем — как на рисунке 44, *в* ($Bxyz$, $Bx \parallel AQ$, где точка Q — середина ребра BC). В указанных системах координат найдите координаты какого-нибудь нормального вектора плоскости:

а) AB_1C_1;
б) AB_1P_1;
в) B_2C_1P, где точки B_2 и P — середины рёбер BB_1 и AC соответственно.

13. Вычисление угла между плоскостями

Пусть данные плоскости α и β пересекаются по прямой UV, а плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым p и q соответственно.

Если плоскость $\gamma \perp UV$ (рис. 45), то угол φ между прямыми p и q является по определению углом между плоскостями α и β. Ясно, что $0° < \varphi \leqslant 90°$.

В плоскости γ проведём, например, через точку $C = p \cap q$ прямые p и q_1 (рис. 46). Если $p_1 \perp p$ и $q_1 \perp q$, то $\widehat{p_1q_1} = \widehat{pq}$, т. е. $\widehat{p_1q_1} = \varphi$.

Значит, $\cos\varphi = \cos(\widehat{p_1q_1}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2})|$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — направляющие векторы прямых p_1 и q_1 соответственно.

Так как $UV \perp \gamma$, то $UV \perp p_1$, т. е. $p_1 \perp UV$. Но по построению $p_1 \perp p_1$. Таким образом, прямая p_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости α. Следовательно, $p_1 \perp \alpha$. Аналогично $q_1 \perp \beta$. А это значит, что векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальные векторы плоскостей α и β соответственно.

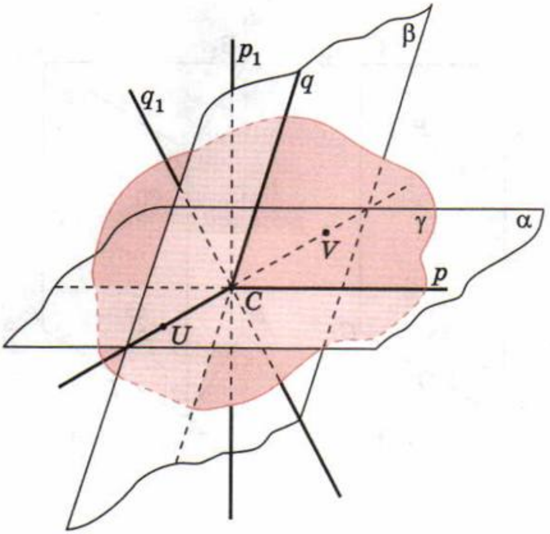


Рис. 45

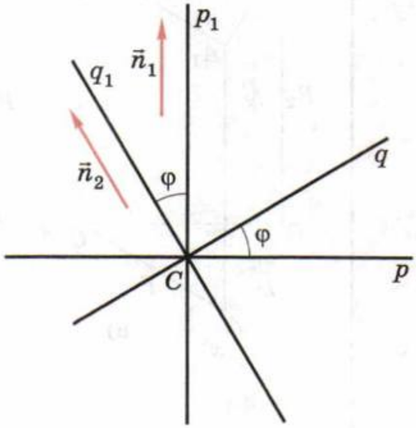


Рис. 46

Таким образом, $\cos\varphi = \cos(\widehat{\alpha\beta}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_1\vec{n}_2})|$, и если $\vec{n}_1(x_1; y_1, z_1)$, $\vec{n}_2(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\cos(\widehat{\alpha\beta}) = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример 21. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно стороне её основания. Найдём угол φ между плоскостями смежных боковых граней.

Решение. Найдём, например, угол φ между плоскостями MAD и MCD правильной пирамиды $MABCD$ (рис. 47).

1) Используя особенности заданной фигуры, зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$, как показано на рисунке 47 ($OE \parallel AB$, $OF \parallel AD$, отрезок OE принят за единицу измерения).

2) В заданной системе координат находим $O(0; 0; 0)$, $E(1; 0; 0)$,

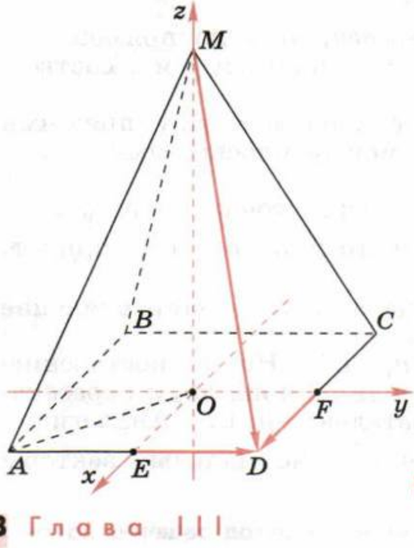


Рис. 47

$F(0; 1; 0)$. Далее из прямоугольного треугольника MOA находим $MO = \sqrt{MA^2 - OA^2} = \sqrt{2}$, т. е. $M(0; 0; \sqrt{2})$.

Найдём ещё, что $D(1; 1; 0)$, и затем найдём координаты каких-нибудь векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальных векторов плоскостей MAD и MCD соответственно.

Так как $\vec{n}_1 \perp MAD$, то $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{ED}$ и $\vec{n}_1 \perp \overrightarrow{MD}$, т. е. $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{MD} = 0. \end{cases}$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{MD}$. Имеем $\overrightarrow{ED}(0; 1; 0)$, $\overrightarrow{MD}(1; 1; -\sqrt{2})$. Полагая $\vec{n}_1(k_1; l_1; m_1)$, получим следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \cdot 0 + l \cdot m_1 \cdot 0 = 0 \\ k_1 \cdot 1 + l_1 \cdot 1 + m_1 \cdot (-\sqrt{2}) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $l_1 = 0$. Полагая затем, например, $m_1 = \sqrt{2}$, найдём из второго уравнения $k_1 = 2$. Таким образом, $\vec{n}_1(2; 0; \sqrt{2})$.

Аналогично находим координаты вектора $\vec{n}_2$. Так как $\vec{n}_2$ перпендикулярен плоскости MCD, то $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{FD}$ и $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{MD}$, т. е.

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{FD} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{MD} = 0. \end{cases}$$

Координаты $\overrightarrow{FD}$ и $\overrightarrow{MD}$: $\overrightarrow{FD}(1; 0; 0)$, $\overrightarrow{MD}(1; 1; -\sqrt{2})$. Получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} k_2 \cdot 1 + l_2 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 = 0 \\ k_2 \cdot 1 + l_2 \cdot 1 + m_2 \cdot (-\sqrt{2}) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $k_2 = 0$. Полагая во втором уравнении, например, $m_2 = \sqrt{2}$, получим $l_2 = 2$. Таким образом, $\vec{n}_2(0; 2; \sqrt{2})$.

3) $\cos \varphi = \cos(\widehat{MAD\ MCD}) = |\cos(\widehat{\vec{n}_1 \vec{n}_2})| = \dfrac{|2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|}{\sqrt{4+2} \cdot \sqrt{4+2}} = \dfrac{1}{3}$.

Итак, искомый угол между плоскостями MAD и MCD $\varphi = \arccos \dfrac{1}{3}$.

С Задания для самостоятельной работы

54 Отношение рёбер $AB : AA_1$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $2 : 3$, точка C_2 — середина её ребра CC_1. Найдите угол между плоскостью AB_1C_2 и плоскостью:
а) ABC; б) BCC_1; в) ACB_1; г) AB_1C_1; д) B_1C_2D; е) AB_1C.

55 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник, у которого $AB : AD = 1 : 2$, а её высота MO проектируется в точку пересечения диагоналей основания и равна половине диагонали. На ребре MC взята точка C_1 — его середина. Найдите углы между плоскостью BC_1D и плоскостью:
а) MAC; б) ABC; в) MCD; г) MAD; д) MCF, где точка F — середина ребра AD; е) MBE, где точка E — середина ребра CD.

56 Высота MO правильной пирамиды $MABC$ равна стороне её основания. Найдите угол между плоскостью α, проходящей через точку A перпендикулярно прямой MC, и плоскостью:
а) MCE, где точка E — середина ребра AB; б) MAC;
в) ABC; г) MAB; д) MDB, где точка D — середина ребра AC;
е) MDE, где точки D и E — середины рёбер AC и AB соответственно.

57 На ребре AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка A_2 — середина этого ребра. Найдите углы между плоскостью A_1C_1D и плоскостью:
а) A_2B_1D; б) A_2B_1C; в) $A_2B_1C_1$; г) A_2C_1D; д) A_2B_1P, где точка P — середина ребра AD; е) A_1B_1C.

58 На ребре DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка D_2 — середина этого ребра. Найдите углы между плоскостью AB_1D_2 и плоскостью:
а) $B_1C_1D_2$; б) $A_1B_1D_2$; в) AB_1C; г) $A_1C_1D_2$; д) ACD_2; е) AC_1D_2.

59 В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция, у которой $AD \parallel BC$, $CD \perp BC$ и $MO = AD = CD = \frac{1}{2}BC$. На ребре MB взята точка B_1 — середина этого ребра, а на рёбрах AB и AD взяты точки P и Q — середины этих рёбер соответственно. Вершина M пирамиды одинаково удалена от вершин A, C и D. Найдите угол между плоскостью MAC и плоскостью:
а) AB_1C; б) AB_1D; в) B_1CD; г) BMD; д) CMQ; е) CMP.

14. Уравнение плоскости

Пусть точки $A_1(a_1; b_1; c_1)$, $A_2(a_2; b_2; c_2)$, и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точки пространства, заданные в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Существует единственная плоскость α, проходящая через точку M_0 перпендикулярно прямой A_1A_2. Если точка $M(x; y; z)$ — текущая точка этой плоскости (отличая от точки M_0), то $\overrightarrow{A_1A_2} \perp \overrightarrow{M_0M}$ (рис. 48), т. е.

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0. \tag{1}$$

Таково уравнение плоскости α в векторной форме. Перейдём к его координатной форме.

Так как $\overrightarrow{A_1A_2}(a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, то из уравнения (1) приходим к уравнению

$$(a_2 - a_1)(x - x_0) + (b_2 - b_1)(y - y_0) + (c_2 - c_1)(z - z_0) = 0,$$

полагая в котором (для краткости) $a_2 - a_1 = a$, $b_2 - b_1 = b$ и $c_2 - c_1 = c$, получим уравнение

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

Итак, если точка $M(x; y; z)$ принадлежит плоскости α, то её координаты удовлетворяют уравнению (2). Верно и обратное утверждение: всякое уравнение первой степени с тремя переменными определяет в пространстве некоторую плоскость.

Уравнение (2) — это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, для которой вектор $\vec{n}(a; b; c)$ является нормальным вектором.

Составлять уравнение плоскости α целесообразно в тех случаях, когда заданы:

1) точка, через которую проходит плоскость α, и прямая, перпендикулярная к этой плоскости;

2) три не лежащие на одной прямой точки, через которые проходит плоскость α;

3) точка, через которую проходит плоскость α, и две прямые, параллельные плоскости α, но не параллельные между собой.

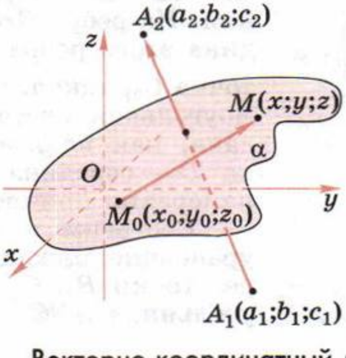


Рис. 48

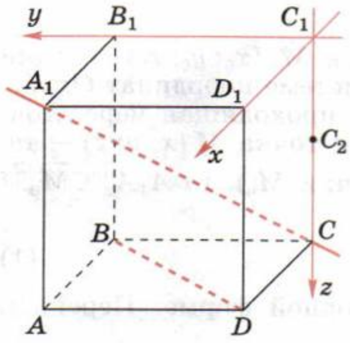


Рис. 49

Пример 22. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка C_2 — середина этого ребра. Прямоугольная система координат C_1xyz задана в пространстве, как показано на рисунке 49, с единицей измерения отрезков, равной ребру куба.

Составим в этой системе координат уравнение плоскости, проходящей через точку C_2, перпендикулярно прямой: а) A_1C; б) BD.

Решение. а) В заданной системе координат находим $C_1(0; 0; 0)$, $D_1(1; 0; 0)$, $B_1(0; 1; 0)$ и $C(0; 0; 1)$. Далее находим $C_2\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$. Так как плоскость $\alpha \perp A_1C$, то вектор $\overrightarrow{A_1C}$ перпендикулярен к плоскости α. Найдём координаты этого вектора. Получаем последовательно $A_1(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{A_1C}(-1; -1; 1)$, и затем уравнение плоскости α:

$$(-1)\cdot(x-0)+(-1)\cdot(y-0)+1\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)=0,$$

или после упрощений

$$2x+2y-2z+1=0.$$

б) Найдём координаты точек B и D: $B(0; 1; 1)$, $D(1; 0; 1)$. Нормальным вектором плоскости α является, например, вектор $\overrightarrow{BD}(1, -1; 0)$. Получим уравнение плоскости α:

$$1\cdot(x-0)+(-1)\cdot(y-0)+0\left(z-\frac{1}{2}\right)=0,$$

или после упрощений

$$x-y=0.$$

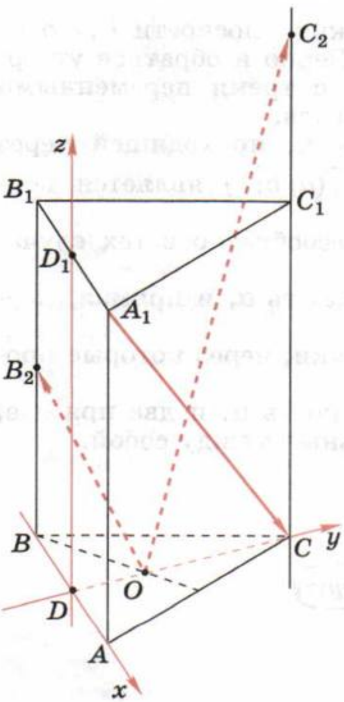


Рис. 50

Пример 23. Высота правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна стороне её основания. На ребре BB_1 взята точка B_2 — середина этого ребра, а на прямой CC_1 взята точка C_2, такая, что $\overrightarrow{CC_2}:\overrightarrow{CC_1}=3:2$. Прямоугольная система координат $Dxyz$ задана, как показано на рисунке 50 (точка D — середина ребра AB, за единицу измерения принят отрезок, равный AD).

Составим в этой системе координат уравнение плоскости α, проходящей через точки B_2, C_2 и точку O — центр треугольника ABC.

Решение. В заданной системе координат имеем $D(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $C(0; \sqrt{3}; 0)$, $D_1(0; 0; 2)$, где точка D_1 — середина ребра A_1B_1. Далее находим $B_2(-1; 0; 1)$, $C_2(0; \sqrt{3}; 3)$ и $O\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$.

Найдём теперь координаты векторов $\overrightarrow{OC_2}$ и $\overrightarrow{OB_2}$, коллинеарных плоскости α, но не коллинеарных между собой. Получаем $\overrightarrow{OC_2}\left(0; \frac{2\sqrt{3}}{3}; 3\right)$ и $\overrightarrow{OB_2}\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$.

Для составления уравнения плоскости α найдём координаты вектора $\vec{n}$ — какого-нибудь нормального вектора плоскости α. Таким вектором является любой вектор, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{OC_2}$ и $\overrightarrow{OB_2}$. Итак,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OC_2} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB_2} = 0. \end{cases}$$

Пусть $\vec{n}(k; l; m)$. Тогда

$$\begin{cases} k \cdot 0 + l \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + m \cdot 3 = 0 \\ k \cdot (-1) + l \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + m \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

С точностью до множителя пропорциональности находим из этой системы $k = 5$, $l = -3\sqrt{3}$, $m = 2$.

Таким образом, $\vec{n}(5; -3\sqrt{3}; 2)$.

Для составления уравнения плоскости воспользуемся координатами какой-нибудь из трёх данных точек. Например, координатами точки $O\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$. Получаем уравнение плоскости α:

$5(x-0) + (-3\sqrt{3})\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2(z-0) = 0$, или после упрощений

$$5x - 3\sqrt{3}y + 2z + 3 = 0.$$

С Задания для самостоятельной работы

60 Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно стороне её основания. На ребре AC взята точка P — середина этого ребра. Приняв за единицу измерения отрезок, равный половине стороны основания призмы, задайте прямоугольную систему координат в пространстве сначала, как показано на рисунке 51, *а* ($Dxyz$, где точка D — середина ребра AB, $Dz \parallel AA_1$), потом — как на рисунке 51, *б* ($Qxyz$, где точка Q — середина ребра BC, $Qz \parallel BB_1$), и затем — как на рисунке 51, *в* ($Bxyz$, $Bx \parallel AC$). В каждой из этих систем координат составьте уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярно прямой: а) AB; б) AC; в) BC_1.

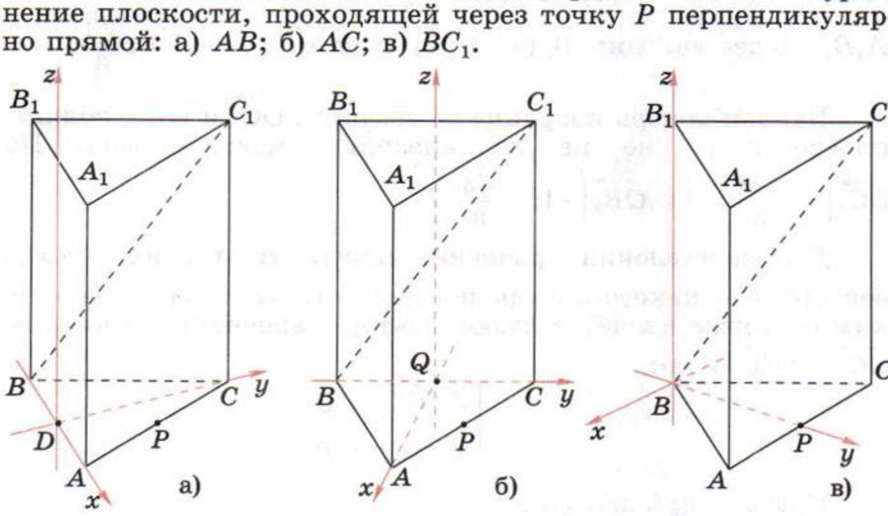


Рис. 51

61 Все плоские углы при вершине M правильной пирамиды $MABC$ прямые. На рёбрах AB, MA и MB пирамиды взяты точки P, A_1 и B_1 соответственно — середины этих рёбер. Приняв за единицу измерения отрезок, равный боковому ребру пирамиды, задайте прямоугольную систему координат в пространстве сначала, как показано на рисунке 52, *а* ($Mxyz$), потом — как на рисунке 52, *б* ($Pxyz$, где ось Pz параллельна высоте MO пирамиды), а затем — как на рисунке 52, *в* ($Oxyz$, $Ox \parallel AC$, $Oy \perp AC$). В каждой из этих систем координат составьте уравнение плоскости, проходящей через точку O — основание высоты MO пирамиды параллельно прямым: а) BC и MA; б) CP и BA_1; в) MC и AB_1.

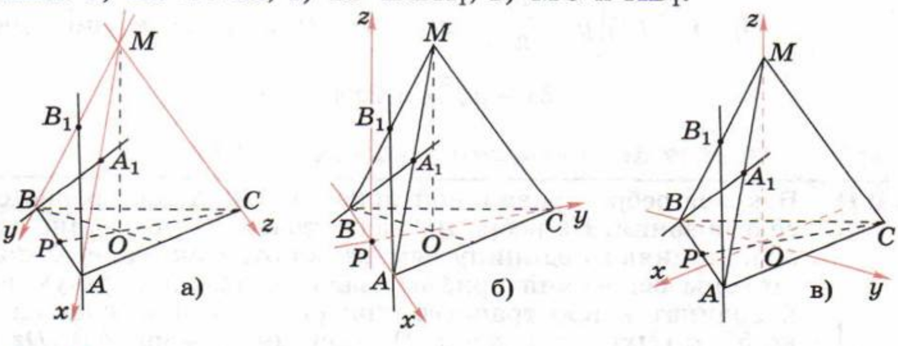


Рис. 52

62 Отношение рёбер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $1 : 2 : 1$. На его рёбрах CD, AD и AB взяты точки P, Q и V соответственно — середины этих рёбер. Приняв отрезок, равный AB, за единицу измерения, задайте в пространстве прямоугольную систему координат. Сделайте это сначала, как показано на рисунке 53, *а* ($Bxyz$), потом — как на рисунке 53, *б* ($Qxyz$, $Qx \parallel AB$, $Qz \parallel AA_1$) и затем — как на рисунке 53, *в* ($Oxyz$, где точка O — центр грани CDD_1C_1, $Oz \parallel AD$). В каждой из этих систем координат составьте уравнение плоскости: а) B_1C_1P; б) ADC_1; в) C_1VQ.

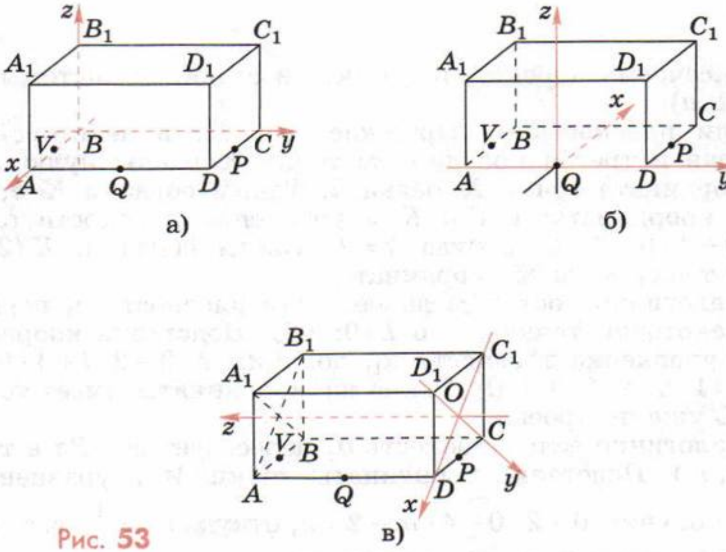


Рис. 53

15. Построение сечения многогранника плоскостью, заданной уравнением

Пример 24. Вершина B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ принята за начало прямоугольной системы координат $Bxyz$ в пространстве. Его ребро принято за единицу измерения отрезков. Оси Bx, By и Bz выбраны так, как показано на рисунках 54, *а—в*.

Построим сечения куба плоскостями α_1, α_2 и α_3, заданными следующими уравнениями:

а) $\alpha_1 : x + 2y + 4z - 2 = 0$;
б) $\alpha_2 : 2x - 2y + z = 0$;
в) $\alpha_3 : 2y + 3z - 3 = 0$.

Решение. а) Построим какие-нибудь три точки, принадлежащие плоскости α_1, но не лежащие на одной прямой, например точ-

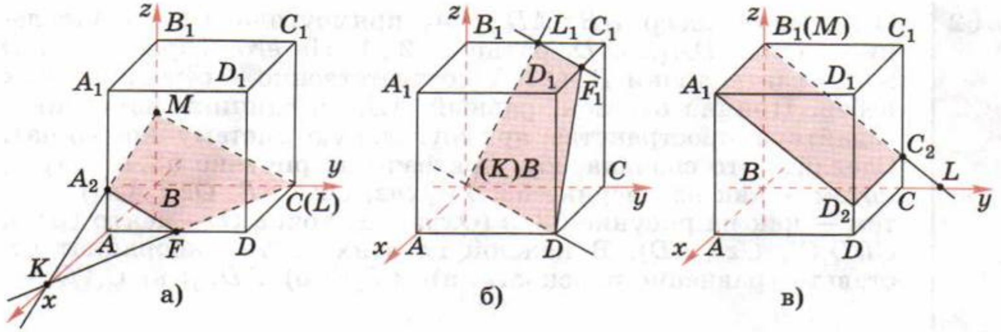


Рис. 54

ки пересечения плоскости α_1 с осями заданной системы координат (рис. 54, *а*).

Если плоскость α_1 пересекает ось Bx в некоторой точке K, то вторая и третья координаты точки K равны нулю. Пусть первая координата точки K равна k. Таким образом $K\,(k;\,0;\,0)$. Подставив координаты точки K в уравнение плоскости α_1, получим $k + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 = 0$, откуда $k = 2$. Таким образом, $K\,(2;\,0;\,0)$. Построим точку K по её координатам.

Аналогично поступим далее. Если плоскость α_1 пересекает ось By в некоторой точке L, то $L\,(0;\,l;\,0)$. Подставив координаты точки L в уравнение плоскости α_1, получим $2 \cdot 0 - 2 \cdot l + 4 \cdot 0 - 2 = 0$, откуда $l = 1$, т. е. $L\,(0;\,l;\,0)$. Такие же координаты имеет точка C, т. е. точка L уже построена.

Аналогично если плоскость α_1 пересекает ось Bz в точке M, то $M\,(0;\,0;\,m)$. Подставив координаты точки M в уравнение плоскости α_1, получим $0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot m - 2 = 0$, откуда $m = \frac{1}{2}$, т. е. $M\left(0;\,0;\,\frac{1}{2}\right)$. Построим точку M по её координатам.

Итак, построены точки K, L и M, через которые проходит плоскость α_1. Построим сечение куба плоскостью α_1 методом следов, как показано на рисунке 54, *а*. Получим четырёхугольник A_2MLF.

б) Если плоскость α_2 пересекает ось Bx в некоторой точке K, то $K\,(k;\,0;\,0)$ (рис. 54, *б*). Подставив координаты точки K в уравнение плоскости α_2, получим $2 \cdot k - 2 \cdot 0 + 0 = 0$, откуда $k = 0$, т. е. $K\,(0;\,0;\,0)$. Значит, точка K совпадает с точкой B — началом системы координат $Bxyz$. Понятно, что искать точки пересечения плоскости α_2 с осями By и Bz не имеет смысла.

Найдём тогда точку пересечения плоскости α_2 с какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, причём параллельной какой-нибудь из осей координат. Например, найдём точку $L_1 = \alpha_2 \cap B_1C_1$. Две координаты точки L_1 известны. Таким образом, $L_1\,(0;\,l;\,1)$. Подставляя эти координаты в уравнение плоскости α_2, получим уравнение $2 \cdot 0 - 2 \cdot l + 1 = 0$, откуда $l = \frac{1}{2}$.

Аналогично найдём точку $F_1 = \alpha_2 \cap C_1D_1$. Понятно, что $F_1(f; 1; 1)$, и, подставив координаты в уравнение плоскости α_2, найдём $f = \frac{1}{2}$, т. е. $F_1\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$.

Итак, плоскость α_2 пересекает плоскость BB_1C по прямой BL_1 и плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой L_1F_1. Заметим далее, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Это значит, что плоскость α_2 пересекает их по параллельным прямым. Итак, плоскость α_2 пересекает плоскость ABC по прямой, проходящей через точку B, параллельно прямой L_1F_1, т. е. $\alpha_2 \cap ABC = BD$. Плоскость α_2 пересекается с плоскостью C_1CD по прямой F_1D. В результате выполненных построений получим четырёхугольник BL_1F_1D — искомое сечение.

в) Если плоскость α_3 пересекает ось Bx в некоторой точке K, то $K(k; 0; 0)$ (рис. 54, *в*). Подставив координаты точки K в уравнение плоскости α_3, получим $0 \cdot k + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 3 = 0$, или $-3 = 0$. Это ложное равенство. Значит, плоскость α_3 не пересекает ось Bx. Другими словами, ось Bx параллельна плоскости α_3.

Предположим далее, что плоскость α_3 пересекает ось By в некоторой точке L. Тогда $L(0; l; 0)$. Подставив координаты точки L в уравнение плоскости α_3, находим $l = \frac{3}{2}$, т. е. $L\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$. Построим точку L по её координатам. Рассмотрим ещё предположение, что плоскость α_3 пересекает ось Bz в некоторой точке M. Тогда $M(0; 0; m)$. Подставив координаты точки M в уравнение α_3, получим $m = 1$, т. е. $M(0; 0; 1)$, значит, точка M совпадает с точкой B_1. Зная, что плоскость α_3 проходит через точки L и B_1 и она параллельна прямой AB, получим сечение куба плоскостью α_3. Понятно, что плоскость α_3 проходит через прямую B_1A_1 и пересекает плоскость CDD_1 по прямой $C_2D_2 \parallel CD$, где $C_2 = B_1L \cap CC_1$.

Искомое сечение — четырёхугольник $A_1B_1C_2D_2$.

C Задания для самостоятельной работы

63 Прямоугольная система координат $Bxyz$ задана в пространстве таким образом, что её началом является вершина B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в качестве единицы измерения отрезков принят отрезок, равный ребру куба, а оси Bx, By и Bz направлены от точки B к точкам A, C и B_1 соответственно. Постройте сечение куба плоскостью, заданной в системе координат $Bxyz$ следующим уравнением:

а) $6x + 2y + 4z - 3 = 0$;
б) $2x + 2y - 3z = 0$;
в) $2x + 2y + z - 3 = 0$;
г) $2x - y + 2z - 1 = 0$;
д) $2x + z - 1 = 0$.

64 Прямоугольная система координат $Bxyz$ задана в пространстве таким образом, что её началом является вершина B прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, отношение рёбер которого $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$. В качестве единицы измерения отрезков принят отрезок, равный AB, а оси Bx, By и Bz направлены от точки B к точкам A, C и B_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, заданной в системе координат $Bxyz$ следующим уравнением:

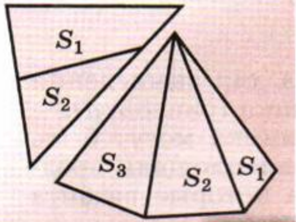
а) $2x + y + z - 3 = 0$;
б) $x + 2y - z - 2 = 0$;
в) $3x + 2y + 2z - 5 = 0$;
г) $2x + 4y - 2z - 1 = 0$;
д) $3x + y + 4z - 4 = 0$;
е) $2x + 4y - 2z - 7 = 0$.

65 Прямоугольная система координат $Pxyz$ задана в пространстве таким образом, что её началом является точка P — середина ребра AB правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, отношение рёбер которой $AA_1 : AB = 1 : 2$, в качестве единицы измерения отрезков принят отрезок, равный PA, а координатные оси Px, Py и Pz направлены от точки P к точкам A, C и P_1 соответственно (точка P_1 — середина ребра A_1B_1). Постройте сечение призмы плоскостью, заданной в системе координат $Pxyz$ следующим уравнением:

а) $3x - 5\sqrt{3}y + 18z - 6 = 0$;
б) $3x - \sqrt{3}y - 6z + 3 = 0$;
в) $2\sqrt{3}x - 3z - 3 = 0$;
г) $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$;
д) $3x - \sqrt{3}y + 3z = 0$;
е) $3x - \sqrt{3}y + z = 0$.

66 Прямоугольная система координат $Mxyz$ задана в пространстве таким образом, что её началом является точка M — вершина правильной пирамиды $MABC$, все плоские углы при которой прямые. За единицу измерения отрезков принят отрезок, равный боковому ребру пирамиды, а её координатные оси Mx, My и Mz направлены от точки M к точкам A, B, C соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, заданной в системе координат $Mxyz$ следующим уравнением:

а) $x + 2y + 2z - 1 = 0$;
б) $2x + 2y + z - 1 = 0$;
в) $x - y = 0$;
г) $x + 2y + z - 1 = 0$;
д) $2x + 2y - 1 = 0$;
е) $2y + 2z - 1 = 0$.



Глава **IV**

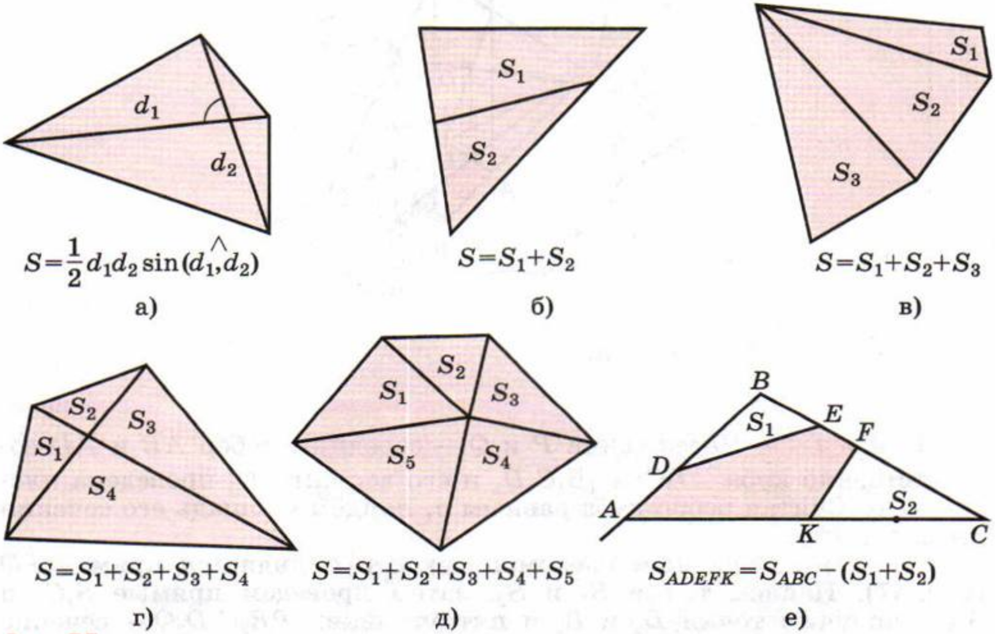
Вычисление площадей

16. Площадь сечения многогранника

В большинстве случаев площадь сечения многогранника плоскостью находят, выясняя сначала вид многоугольника, полученного в сечении. Затем выбирают формулу, являющуюся наиболее целесообразной для вычисления площади многоугольника этого вида.

Так, если сечение многогранника — треугольник, то для вычисления площади сечения могут быть использованы следующие формулы: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{a\,b})$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Если сечением многогранника является параллелограмм, то для вычисления площади сечения могут быть использованы такие формулы: $S = ah_a$, $S = ab\sin(\widehat{a\,b})$, $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin(\widehat{d_1\,d_2})$.



$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin(\widehat{d_1,d_2})$ а)

$S=S_1+S_2$ б)

$S=S_1+S_2+S_3$ в)

$S=S_1+S_2+S_3+S_4$ г)

$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$ д)

$S_{ADEFK}=S_{ABC}-(S_1+S_2)$ е)

Рис. **55**

Последняя формула может быть использована для вычисления площади также любого выпуклого четырёхугольника (рис. 55, *а*).

Для вычисления площади сечения многогранника могут быть использованы также формулы, в которых искомая площадь представлена как сумма (или разность) площадей, на которые разбита исходная фигура (рис. 55, *б—е*).

Теорема

Если многоугольник U' является ортогональной проекцией многоугольника U на плоскость α и угол между плоскостями этих многоугольников равен φ, то площади этих многоугольников связаны соотношением

$$S_{U'} = S_U \cos\varphi.$$

Так, если четырёхугольник $A'B'C'D'$ является ортогональной проекцией четырёхугольника $ABCD$ на плоскость $A'B'C'$ (рис. 56), то $S_{A'B'C'D'} = S_{ABCD}\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями ABC и $A'B'C'$.

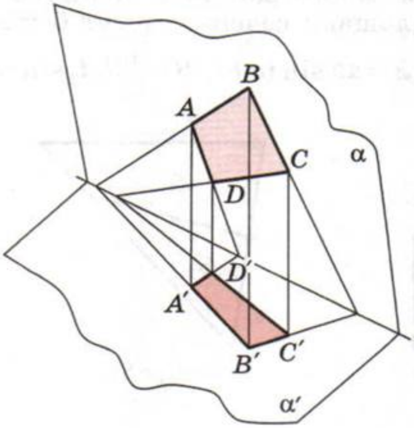


Рис. 56

<u>Пример 25.</u> Через точки P и Q — середины рёбер AB и AD соответственно куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его вершину C_1 проведена плоскость α. Считая ребро куба равным a, найдём площадь его сечения плоскостью α.

Решение. Основным следом плоскости α является прямая PQ (рис. 57). Найдём точки S_1 и S_2, затем проведём прямые S_1C_1 и S_2C_1, получим точки D_2 и B_2 и пятиугольник $PB_2C_1D_2Q$ — сечение куба плоскостью α.

Найдём S — площадь искомого сечения, например, как разность площадей:

$$S = S_{S_1S_2C_1} - (S_{D_2S_1Q} + S_{B_2S_2P}).$$

Приведём кратко необходимые вычисления:

$$S_{S_1S_2C_1} = \frac{1}{2}S_1S_2 \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{34}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{17}}{8},$$

$$S_{D_2S_1Q} = \frac{1}{2} \cdot S_1Q \cdot h.$$

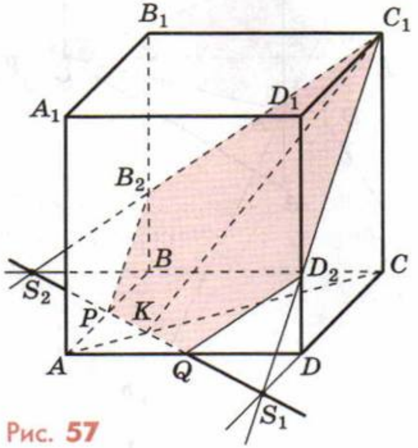


Рис. 57

Но из подобия треугольников D_2QS_1 и C_1KS_1 следует, что $h = \frac{1}{2}C_1K = \frac{1 \cdot a\sqrt{34}}{12}$. Таким образом, $S_{D_2S_1Q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{34}}{12} = \frac{a^2\sqrt{17}}{24}$.

Ясно, что $\triangle B_2S_2P = \triangle D_2QS_1$, т. е. $S_{B_2S_2P} = \frac{a^2\sqrt{17}}{24}$.

Итак,

$$S = \frac{3a^2\sqrt{17}}{8} - 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{17}}{24} = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}.$$

Покажем ещё другой путь вычисления искомой площади. Проекцией сечения $PB_2C_1D_2Q$ на плоскость ABC является пятиугольник $PBCDQ$, а косинус угла φ между плоскостью сечения и плоскостью ABC, т. е. угла C_1KC, равен $\frac{CK}{C_1K}$.

Итак, $S_{PBCDQ} = S_{\text{сеч}} \cdot \cos\varphi$. Находим $S_{PBCDQ} = S_{ABC} - S_{APQ} = \frac{7a^2}{8}$, $\cos\varphi = \frac{\frac{3}{4}AC}{C_1K}$. Так как $AC = a\sqrt{2}$, $C_1K = \sqrt{CC_1^2 + CK^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{34}}{4}$, то $\cos\varphi = \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{34}}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$, и, следовательно,

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{PBCDQ}}{\cos\varphi} = \frac{\frac{7a^2}{8}}{\frac{3\sqrt{17}}{17}} = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}.$$

Пример 26. На рёбрах AB и A_1C_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$, все боковые грани которой — квадраты, взяты точки D и P соответственно — середины этих рёбер. Считая $AB = a$, найдём площадь сечения призмы плоскостью α, проходящей через точку C перпендикулярно прямой DP.

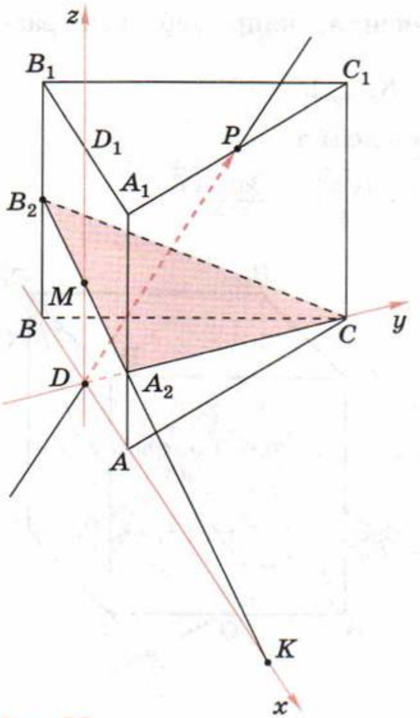


Рис. 58

Решение. Прежде всего отметим, что так как все боковые грани призмы — квадраты, то, например, $CC_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp BC$, и, значит, CC_1 — перпендикуляр к плоскости ABC (рис. 58). Таким образом, заданная призма прямая, и так как сторона её основания равна боковому ребру, то треугольник ABC правильный, т. е. заданная призма правильная.

Построим заданное сечение призмы векторно-координатным способом. Прямоугольную систему координат зададим в пространстве следующим образом: точку D — середину ребра AB — примем за её начало, координатные оси Dx, Dy и Dz зададим, как показано на рисунке 58, а единицей измерения отрезков будем считать отрезок, равный ребру AB.

В этой системе координат находим координаты точек $D\,(0; 0; 0)$, $A\left(\dfrac{a}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, и так как точка D_1 — середина ребра A_1B_1, то $D_1\,(0; 0; a)$.

Для составления уравнения плоскости α найдём координаты какого-нибудь вектора $\vec{n} \perp \alpha$. Воспользуемся тем, что прямая $DP \perp \alpha$. Тогда, например, $\overrightarrow{DP} = \vec{n}$. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{DP}$. Получаем последовательно $A_1\left(\dfrac{a}{2}; 0; a\right)$, $C_1\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$. Тогда $P\left(\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; a\right)$, т. е. $\overrightarrow{DP}\left(\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; a\right)$.

Итак, $\vec{n}\left(\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; a\right)$ и $C\left(0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right) \in \alpha$.

Таким образом, $\dfrac{a}{4}(x-0) + \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\left(y - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) + a(z-0) = 0$, или

$$2x + 2\sqrt{3}y + 8z - 3\alpha = 0. \qquad (1)$$

Таково уравнение плоскости α.

Построим теперь сечение призмы этой плоскостью. Если плоскость α пересекает ось Dx в некоторой точке K, то $K\,(k; 0; 0)$. Подставляя координаты точки K в уравнение (1), получаем $k = \dfrac{3a}{2}$, т. е. $K\left(\dfrac{3a}{2}; 0; 0\right)$. Построим точку K по её координатам.

Аналогично, предполагая, что плоскость α пересекает ось Dz в точке M, находим $M\left(0; 0; \frac{3a}{8}\right)$. Построим точку M по её координатам. Проведём прямую KM. Пусть $KM \cap AA_1 = A_2$ и $KM \cap BB_1 = B_2$. В итоге получаем треугольник A_2B_2C — сечение призмы плоскостью α.

Для вычисления площади этого сечения воспользуемся формулой $S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos\varphi}$, где $S_{\text{пр}}$ — в рассматриваемом примере S_{ABC}, а $\cos\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n_1}\vec{n_2}})|$, где $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ — нормальные векторы плоскостей α и ABC соответственно.

Вектор $\vec{n_1}$ уже известен. Это вектор с координатами $\vec{n_1}(1; \sqrt{3}; 4)$, а вектор $\vec{n_2}$ — это, например, вектор, коллинеарный боковому ребру $\overrightarrow{CC_1}$, т. е. $\vec{n_1}(0; 0; 1)$.

Таким образом, $\cos\varphi = \frac{|1 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{1+3+16}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Тогда

$$S_{\text{сеч}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{2\sqrt{5}}{2}} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8}.$$

С Задания для самостоятельной работы

67 В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды равна катету основания и проектируется в точку O — середину ребра BC. На рёбрах AB и AC взяты точки P и Q соответственно — середины этих рёбер. Считая $AC = a$, найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через:
а) прямую PQ параллельно прямой MC;
б) прямую PQ параллельно прямой MA;
в) прямую OP параллельно прямой MB;
г) прямую OP параллельно прямой MA;
д) прямую OQ параллельно прямой MC;
е) прямую OQ параллельно прямой MA.

68 Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в два раза больше стороны основания. Считая $AB = a$, найдите площадь сечения призмы плоскостью:
а) B_1BS, точка S которой взята на ребре AC таким образом, что $AS : AC = 2 : 3$;
б) VPP_1, точки P и P_1 которой — середины рёбер AC и A_1C_1 соответственно, а точка V взята на ребре BC таким образом, что $BV : BC = 1 : 3$;

в) AB_2C_2, точки B_2 и C_2 которой — середины рёбер BB_1 и CC_1 соответственно;
г) AB_1C_1;
д) AB_1C_2, точка C_2 которой — середина ребра CC_1;
е) AB_1P_1, точка P_1 которой — середина ребра A_1C_1;
ж) ABQ_1, точка Q_1 которой — середина ребра B_1C_1;
з) AC_2Q_1, точки C_2 и Q_1 которой — середины рёбер CC_1 и B_1C_1 соответственно.

69 Найдите площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, плоскостью:
а) $A_2B_1C_1$, точка A_2 которой взята на ребре AA_1 таким образом, что $AA_2 : AA_1 = 1 : 3$;
б) A_1C_1D;
в) A_1EF, точки E и F которой взяты на рёбрах C_1D_1 и DD_1 соответственно таким образом, что $C_1E : C_1D_1 = 1 : 3$, $DF : DD_1 = 2 : 3$;
г) B_1PQ, точки P и Q которой — середины рёбер AB и AD соответственно;
д) C_1DP, точка P которой — середина ребра AB;
е) C_2PQ, точки C_2, P и Q которой — середины рёбер CC_1, AB и AD соответственно;
ж) B_1KD, точка K которой взята на ребре CC_1 так, что $CK : CC_1 = 2 : 3$;
з) VC_2Q, точки V, C_2 и Q которой — середины рёбер A_1B_1, CC_1 и AD соответственно.

70 В основании пирамиды лежит трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 45°$, $\angle BCD = 90°$ и $AD : CD : BC = 1 : 1 : 2$. Точки P, Q и R — середины рёбер AB, CD и AD соответственно. Основанием высоты MO пирамиды является точка O — середина отрезка PQ. Считая $MO = AD = a$, найдите площадь сечения пирамиды плоскостью:
а) MPQ; б) MDB; в) MAC; г) MBQ; д) MBR; е) MAQ; ж) MQR; з) MPR.

71 Отношение рёбер $AB : AD : AA$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $1 : 2 : 1$. Считая $AB = a$, найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью:
а) A_1DP, точка P которой — середина ребра C_1D_1;
б) B_1DA_2, точка A_2 которой — середина ребра AA_1;
в) AB_1P, точка P которой — середина ребра C_1D_1;
г) A_1DC_2, точка C_2 которой — середина ребра CC_1;
д) C_1QR, точки Q и R которой — середины рёбер AB и AD соответственно;
е) B_2PR, точки B_2, P и R которой — середины рёбер BB_1, C_1D_1 и AD соответственно.

17. Площадь поверхности многогранника

Площадь поверхности многогранника — это сумма площадей всех его граней.

Пример 27. Из куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ удалён тетраэдр $O_1D_1O_2D$, вершины O_1 и O_2 которого — центры граней AA_1D_1D и CDD_1C_1 соответственно. Считая ребро куба равным a, найдём площадь поверхности многогранника, полученного после удаления из заданного куба указанного тетраэдра.

Решение. Ясно, что $\triangle O_1O_2D_1$ и $\triangle O_1O_2D$ — равные равносторонние треугольники со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 59). Получаем

$$S = 4S_{ABCD} + 2S_{AA_1D_1O_1D} + 2S_{O_1D_1O_2} = 4a^2 + \frac{2\cdot 3}{4}a^2 + 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}(22+\sqrt{3}).$$

Пример 28. Каждое ребро правильного октаэдра M_1ABCDM_2 разделено на три равных отрезка и точки деления соединены, как показано на рисунке 60.

Считая $AB = a$, найдём площадь поверхности многогранника, полученного после отсечения от заданного октаэдра шести пирамид, вершины которых являются вершинами октаэдра.

Решение. Каждая грань правильного октаэдра — это равносторонний треугольник. Тогда $M_1A_1 = \frac{a}{3}$, $M_1B_1 = \frac{a}{3}$ и далее $A_2B_2 = \frac{a}{3}$. Аналогично $B_2C_2 = \frac{a}{3}$ и $C_2D_2 = D_2A_2 = \frac{a}{3}$. Ясно также, что $A_2B_2 \parallel AB$,

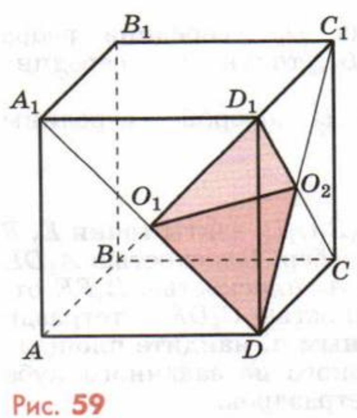


Рис. 59

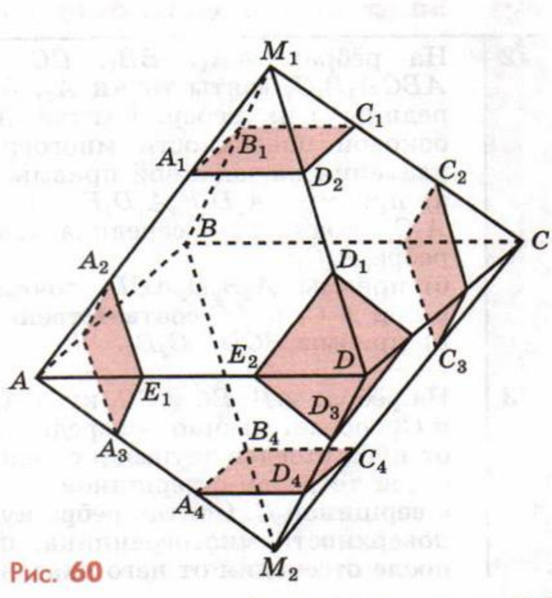


Рис. 60

$B_2C_2 \parallel BC$, $C_2D_2 \parallel CD$ и $D_2A_2 \parallel DA$. Таким образом, четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, являющийся основанием пирамиды $M_1A_1B_1C_1D_1$, — это квадрат со стороной, равной $\frac{a}{3}$, т. е. его площадь равна $\frac{a^2}{9}$. Точно так же основания всех отсечённых от октаэдра пирамид являются квадратами со стороной $\frac{a}{3}$, т. е. имеют площадь $\frac{a^2}{9}$. Так как точки A_2, B_2, C_2 и D_2 одинаково удалены от точки M_1, то они лежат в одной плоскости. Сечением октаэдра этой плоскостью является фигура, подобная квадрату $ABCD$, т. е. четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат и сторона его равна $\frac{a}{6}$, и, следовательно, площадь его равна $\frac{a^2}{36}$.

Стороны плоского шестиугольника $A_1A_2E_1E_2D_2D_1$ равны каждая $\frac{a}{3}$ и углы его равны. Площадь этого правильного шестиугольника равна $6 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Как нетрудно подсчитать, поверхность полученного многогранника имеет 6 граней, являющихся квадратами, и 8 граней, являющихся правильными шестиугольниками. Таким образом, площадь поверхности образовавшегося многогранника

$$S = 8\frac{a^2\sqrt{3}}{6} + 6\frac{a^2}{9} = \frac{2a^3}{3}(2\sqrt{3}+1).$$

C Задания для самостоятельной работы

72 На рёбрах AA_1, BB_1, CC_1 и A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки A_2, B_2, C_2 и D_1 соответственно — середины этих рёбер. Считая $AB = AA_1 = a$, найдите площадь боковой поверхности многогранника, получившегося после удаления из заданной призмы:
а) призмы $A_2D_2F_2A_1D_1F_1$, где точка D_2 — середина ребра A_2C_2, точка F_2 — середина ребра A_2B_2, точка D_1 — середина ребра A_1C_1;
б) призмы $A_2B_2D_2ABD$, точки D_2 и D которой — середины рёбер A_2C_2 и AC соответственно;
в) призмы $BCDB_2C_2D_2$.

73 На рёбрах AB, BC и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки E, F и C_2 соответственно — середины этих рёбер. Плоскостью A_1DE от куба отсечён тетраэдр с вершиной A, плоскостью B_1FE отсечён тетраэдр с вершиной B_1 и плоскостью C_2DF — тетраэдр с вершиной C. Считая ребро куба равным a, найдите площадь поверхности многогранника, полученного из заданного куба после отсечения от него указанных тетраэдров.

74 На рёбрах A_1B_1 и A_1C_1 правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой равно стороне основания, взяты точки D и E соответственно — середины этих рёбер, а в гранях AA_1B_1B и AA_1C_1C взяты точки O_1 и O соответственно — центры этих граней. Считая $AB = a$, найдите площадь поверхности многогранника, гранями которого являются следующие фигуры: невыпуклые пятиугольники ABB_1DO_1 и ACC_1EO_2, треугольники ABC и AO_1O_2, четырёхугольники BB_1C_1C, B_1C_1ED и DEO_2Q_1.

75 На рёбрах MA, AB и AD правильной пирамиды $MABCD$, боковое ребро которой равно стороне основания, взяты точки A_1, F и E соответственно — середины этих рёбер, а на ребре MD взята точка D_1, такая, что $DD_1 = \frac{1}{4}DM$. Считая $AB = a$, найдите площадь поверхности многогранника, который получается после отсечения от заданной пирамиды тетраэдров A_1AFE и D_1CDE.

76 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник, у которого $AB : AD = 1 : 2$. Высота пирамиды проектируется в точку O — центр основания. На рёбрах MA, MC, AD и CD пирамиды взяты точки A_1, C_1, E и F соответственно — середины этих рёбер. Считая $AB = a$, $MO = 2a$, найдите площадь поверхности многогранника, гранями которого являются треугольники MAB, MBC, A_1AE, C_1CF, MA_1C_1 и четырёхугольник A_1C_1FE.

18. Площадь поверхности призмы

Площадь полной поверхности призмы $S_{полн}$, площадь её боковой поверхности $S_{бок}$, площадь основания призмы $S_{осн}$ и площади боковых граней n-угольной призмы S_1, S_2, ..., S_n связаны формулами:

$$S_{бок} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n,\ S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания на боковое ребро.

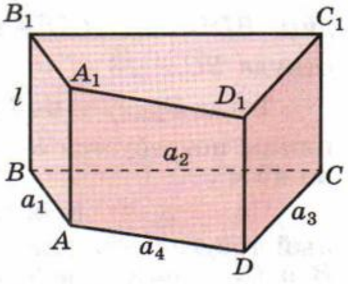


Рис. 61

Так, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма (рис. 61), то

$$S_{бок} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\, l = P \cdot l,$$

где a_1, a_2, a_3 и a_4 — стороны основания призмы, l — её боковое ребро.

Пример 29. Садовая теплица имеет форму пятиугольной призмы, длина которой равна 6 м, ширина 3 м. Высота каждой боковой стенки теплицы равна 2 м, а двугранный угол между равными гра-

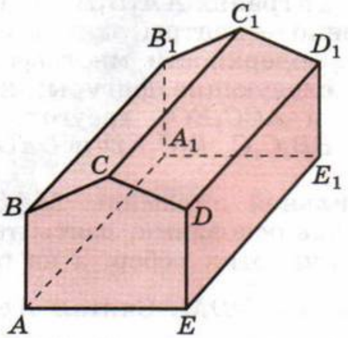


Рис. 62

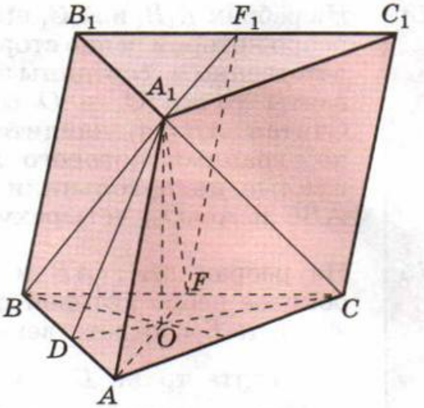


Рис. 63

нями, образующими её крышу, равен 120°. Найдём площадь плёнки, которая потребуется для покрытия боковых стенок и крыши теплицы.

Решение. Пусть $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ — прямая призма (рис. 62). Так как грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — это основания призмы, которые по условию плёнкой не покрываются, то площадь поверхности той части теплицы, которую необходимо покрыть плёнкой, равна

$$S = 2S_{AA_1B_1B} + 2S_{BB_1C_1C}.$$

Находим $S_{AA_1B_1B} = 6 \cdot 2 = 12$ (м)^2, $S_{BB_1C_1C} = BB_1 \cdot BC = 6BC$.

Из треугольника BCD, в котором $BD = 3$ м и $\angle BCD = 120°$, находим $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos BCD$, или $9 = 2BC^2 - 2BC^2\left(-\frac{1}{2}\right)$, откуда $BC = \sqrt{3}$ м^2.

Тогда $S_{BB_1C_1C} = 6\sqrt{3}$ м^2. Таким образом, плёнки для покрытия теплицы потребуется $S = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 6\sqrt{3} = 12(2 + \sqrt{3})$ (м)^2, т. е. примерно 45 м^2.

Пример 30. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник. Её вершина A_1 одинаково удалена от вершин A, B и C, а высота равна стороне основания. Считая $AB = a$, найдём $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Полагая для краткости $S_{ABB_1A_1} = S_1$, $S_{ACC_1A_1} = S_2$, и $S_{BCC_1B_1} = S_3$, имеем $S_{бок} = S_1 + S_2 + S_3$ (рис. 63).

Так как по условию $A_1A = A_1B = A_1C$ и $AB = AC$, то $\triangle A_1AB = \triangle A_1AC$. Тогда $S_{A_1AB} = S_{A_1AC}$, и, следовательно, $2S_{A_1AB} = 2S_{A_1AC}$, т. е. $S_1 = S_2$.

Таким образом, $S_{бок} = 2S_1 + S_3$.

Найдём S_1. Соединим точку A_1 с точкой D — серединой ребра AB. Так как $A_1A = A_1B$, то в треугольнике A_1AB медиана A_1D является и высотой. Поэтому $S_1 = AB \cdot A_1D$.

Пирамида A_1ABC является правильной, и поэтому её высота A_1O проектируется в центр основания, т. е. в точку пересечения медиан. Из прямоугольного треугольника A_1OD, где $A_1O = a$ и $OD = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, находим $A_1D = \sqrt{A_1O^2 + OD^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$.

Итак, $S_1 = \frac{a^2\sqrt{39}}{6}$, поэтому и $S_2 = \frac{a^2\sqrt{39}}{6}$.

Найдём теперь S_3. Выясним с этой целью вид четырёхугольника BCC_1B_1. Пусть $F = AO \cap BC$. Тогда AF — медиана правильного треугольника ABC, т. е. $BC \perp AF$.

Таким образом, прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости A_1AF, и поэтому прямая BC перпендикулярна любой прямой плоскости A_1AF, и, в частности, $BC \perp F_1F$ (точка F_1 — середина ребра B_1C_1).

Так как $B_1B \parallel F_1F$, то и $B_1B \perp BC$. Это значит, что четырёхугольник BCC_1B_1 является прямоугольником. Тогда $S_3 = BC \cdot BB_1 = a \cdot BB_1$.

Понятно, что $BB_1 = AA_1$, и из прямоугольного треугольника A_1AO следует, что $AA_1 = \sqrt{A_1O^2 + AO^2}$, где $AO = \frac{2}{3}AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Итак, $AA_1 = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, и, значит, $S_3 = a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2^2\sqrt{3}}{3}$.

Таким образом, $S_{бок} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{39}}{6} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot (\sqrt{13} + 2)$.

Пример 31. Отношение рёбер $AB : AD : AA_1$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $1 : 2 : 1$. Секущая плоскость AB_1C разделяет этот параллелепипед на многогранники $U(B)$ и $U(A_1)$. Найдём отношение площадей поверхностей этих многогранников.

Решение. Треугольник AB_1C, полученный в сечении параллелепипеда плоскостью AB_1C, является гранью каждого из многогранников $U(B)$ и $U(A_1)$, на которые плоскость AB_1C разделяет параллелепипед (рис. 64). Многогранники $U(B)$ и $U(A_1)$ являются, таким образом, отсечёнными от заданного многогранника. Найдём сначала площадь сечения.

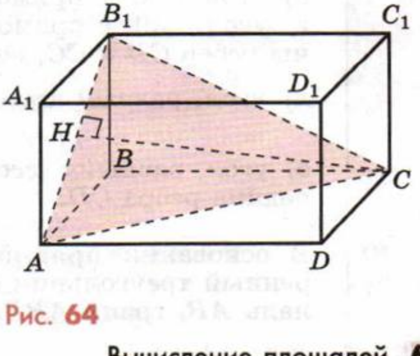


Рис. 64

Проще всего это сделать, если заметить, что в треугольнике AB_1C $AC = B_1C$. Тогда медиана CH этого треугольника является и его высотой, т. е. $S_{сеч} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot CH$. Введём для вычислений вспомогательный параметр, положив, например, $AB = a$. Ясно, что тогда $AB_1 = a\sqrt{2}$, $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом,

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Найдём теперь площадь поверхности многогранника $U(B)$. Обозначим её S_1. Получаем $S_1 = S_{ABC} + S_{ABB_1} + S_{B_1BC} + S_{\text{сеч}} = a^2 + \frac{a^2}{2} + a^2 + \frac{3a^2}{2} = 4a^2$.

Аналогично находим S_2 — площадь поверхности многогранника $U(A_1)$. Получаем $S_2 = S_{AA_1B_1} + S_{B_1C_1C} + S_{CDD_1A_1} + S_{ADD_1A_1} + S_{ACD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2 + a^2 + 2a^2 + \frac{3a^2}{2} = 9a^2$.

Итак, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4a^2}{9a^2} = 4:9$.

C Задания для самостоятельной работы

77 Углы, образованные прямой AC, лежащей в основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, с прямыми B_1C_1 и A_1C, равны соответственно α и β, а диагональ параллелепипеда равна d. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если:
а) $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$; б) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$; в) $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$;
г) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$; д) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$; е) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$.

78 Боковое ребро правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если прямая B_1D образует:
а) угол в 60° с прямой AB;
б) угол в 60° с прямой A_1D_1;
в) угол в 60° с прямой A_1C;
г) угол в 30° с прямой FC_2, точки F и C_2 которой — середины рёбер CD и CC_1 соответственно;
д) угол, равный $\arccos\frac{1}{5}$ с прямой AB;
е) угол, равный $\arccos\frac{1}{4}$ с прямой AF, точка F которой — середина ребра CD.

79 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Диагональ AB_1 грани ABB_1A_1 равна d.

Найдите площадь боковой поверхности призмы, когда равен $60°$ угол между прямой AB_1 и:
а) прямой BC;
б) прямой A_1C_1;
в) прямой CC_1;
г) прямой C_1A_2, точка A которой — середина ребра AA_1;
д) плоскостью ABC;
е) плоскостью грани BCC_1B_1.

80 Вершина A_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ одинаково удалена от вершин A, B и D основания. Считая сторону AB основания призмы равной a, высоту призмы равной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, найдите площадь боковой поверхности призмы, если в её основании лежит:
а) квадрат;
б) прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$;
в) ромб, угол BAD которого равен $60°$.

81 Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно a. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если угол между плоскостью её основания и секущей плоскостью ABC_1 равен: а) $45°$; б) $60°$; в) α.

82 Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Найдите площадь полной поверхности призмы, если известно, что секущая плоскость ABC делит площадь поверхности призмы в отношении: а) $2 : 3$; б) $1 : \sqrt{3}$; в) $m : (m+1)$.

83 Боковое ребро призмы равно b, а сторона её основания равна a. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания.
Найдите площадь боковой поверхности призмы, если её основанием является:
а) правильный треугольник;
б) квадрат;
в) правильный шестиугольник.

84 Сторона основания правильной призмы равна a. Найдите площадь её боковой поверхности, если угол между прямыми AB_1 и A_1C равен: а) $60°$; б) $45°$; в) 2α.

85 Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, одна из сторон его основания равна $2a$. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если угол между секущей плоскостью AD_1C и плоскостью основания равен: а) $30°$; б) $45°$; в) α.

19. Площадь поверхности пирамиды

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней, т. е.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

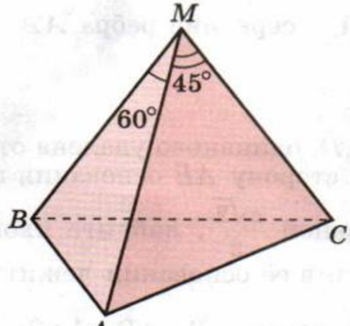


Рис. 65

Пример 32. Найдём площадь полной поверхности пирамиды $MABC$, у которой $MA=3$, $MB=5$, $MC=9$ и известны плоские углы при вершине M: $\angle AMB=60°$, $\angle BMC=90°$ и $\angle AMC=45°$.

Решение. $S_{\text{бок}} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}$ (рис. 65), где $S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 60° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Итак, $S_{\text{бок}} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{45}{2} + \frac{27\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4}(5\sqrt{3} + 30 + 9\sqrt{2})$.

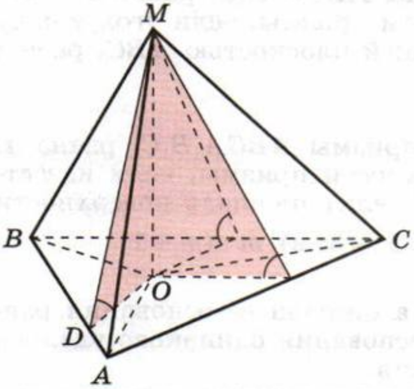


Рис. 66

Пример 33. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b. Каждый из двугранных углов при рёбрах основания равен 60°. Найдём площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $MABC$ — заданная пирамида и MO — её высота (рис. 66). Опустим из точки O перпендикуляр OD на сторону AB треугольника ABC и точку D соединим с точкой M. Тогда OD — это проекция наклонной MD к плоскости ABC, и, следовательно, $MD \perp AB$. Таким образом, угол MDO является линейным углом двугранного угла при ребре AB. Значит, $\angle MDO = 60°$ и площадь боковой грани $S_{MAB} = \frac{S_{OAB}}{\cos 60°}$.

Точно так же $S_{MAC} = \frac{S_{OAC}}{\cos 60°}$ и $S_{BMC} = \frac{S_{OBC}}{\cos 60°}$. Тогда площадь боковой поверхности заданной пирамиды

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}}{\cos 60°} = \frac{S_{ABC}}{\cos 60°} = ab.$$

Пример 34. Из прямоугольной трапеции $ABCD$, у которой $AB : BC : CD = 1 : 1 : 2$, удалён треугольник ABE, вершина E которого является точкой пересечения диагоналей AC и BD трапеции (рис. 67, *а*). Пятиугольник $BCDAE$ принят за основание пирамиды, боковое ребро MD которой перпендикулярно к плоскости основания и равно стороне CD. Считая $AB = a$, найдём площадь полной поверхности пирамиды $MBCDAE$.

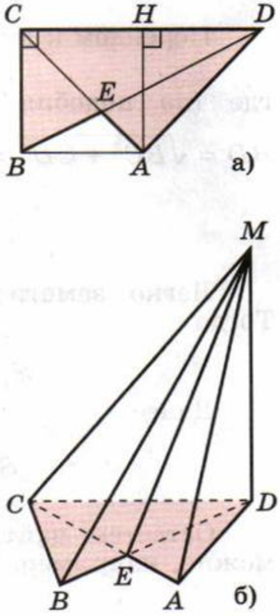


Рис. 67

Решение. Площадь полной поверхности пирамиды $MBCDAE$ (рис. 67, *б*) представляет собой сумму площади боковой поверхности этой пирамиды и площади её основания.

Таким образом, $S_{полн} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_{осн}$, где $S_1 = S_{MAD}$, $S_2 = S_{MAE}$, $S_3 = S_{MBE}$, $S_4 = S_{MBC}$, $S_5 = S_{MCD}$ и $S_{осн} = S_{BCDAE}$.

Так как $AB = a$ и $AB : BC : CD = 1 : 1 : 2$, то $BC = a$, $CD = 2a$.

Перейдём к вычислениям S_1, ..., S_5 и $S_{осн}$.

Так как ребро MD перпендикулярно к плоскости основания пирамиды, то $MD = 2a$ и $MD \perp AD$. Тогда $S_1 = \frac{1}{2} AD \cdot MD$. Проведём $AH \parallel BC$ (см. рис. 67, *а*) и из прямоугольного равнобедренного треугольника ADH найдём $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = a\sqrt{2}$. Таким образом,

$$S_1 = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{2}.$$

Для вычисления площади S_2 заметим, что в прямоугольном треугольнике ACH $AH = CH$, т. е. $\angle CAH = 45°$. Аналогично и $\angle DAH = 45°$. Тогда $DA \perp AC$.

Но прямая AD — это проекция прямой MA на плоскость ABC, и, следовательно, $MA \perp AC$. Значит, $S_2 = \frac{1}{2} AE \cdot MA$.

Понятно, что $MA = \sqrt{MD^2 + AD^2} = a\sqrt{6}$, а из подобия треугольников ABE и CDE следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD}$, т. е. $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$. Кроме того, ясно, что $AC = a\sqrt{2}$.

Итак, $\frac{AE}{AC - AE} = \frac{1}{2}$, или $\frac{AE}{a\sqrt{2} - AE} = \frac{1}{2}$, откуда $AE = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Таким образом,

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot a\sqrt{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Перейдём к вычислению S_3. Легко видеть, что $S_3 = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot MD$, где (из подобия треугольников ABE и CDE) $BE = \frac{1}{3}BD$. Но $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = a\sqrt{5}$. Значит, $BE = \frac{a\sqrt{5}}{3}$. Таким образом,

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot 2a = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}.$$

Легко заметить, что $MC \perp AC$ и $MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = 2a\sqrt{2}$. Тогда

$$S_4 = \frac{1}{2}BC \cdot MC = \frac{1}{2}a \cdot 2a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$

Далее,

$$S_5 = \frac{1}{2}CD \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2.$$

Остаётся найти площадь основания пирамиды. Сделать это можно, например, так:

$$S_{\text{осн}} = S_{ABCD} - S_{ABE}, \text{ где}$$

$$S_{ABCD} = \frac{a + 2a}{2} \cdot a = \frac{3a^2}{2}, \text{ а}$$

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{6}.$$

Таким образом,

$$S_{\text{осн}} = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{4a^2}{3}.$$

Подсчитаем, наконец, $S_{\text{полн}}$:

$$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{3} + \frac{a^2\sqrt{5}}{3} + a^2\sqrt{2} + 2a^2 + \frac{4a^2}{3} =$$

$$= \frac{a^2}{3}(10 + 6\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

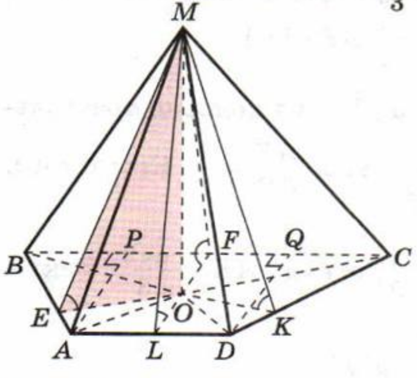


Рис. 68

Пример 35. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, параллельные стороны которой равны a и b $(a > b)$. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом, равным φ. Найдём площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $MABCD$ — заданная пирамида, у которой $BC \parallel AD$, $BC = a$, $AD = b$ и MO — высота пирамиды (рис. 68). Опустим из точки O перпендикуляр OE на сторону AB трапеции и точку E соединим с вершиной M.

Так как OE — проекция наклонной ME на плоскость ABC и $OE \perp AB$, то и $ME \perp AB$. Значит, угол MEO является линейным углом двугранного угла при ребре AB, т. е. $\angle MEO = \varphi$.

Аналогично, опустив перпендикуляры OF, OK и OL на стороны BC, CD и AD трапеции соответственно и соединив точки F, K и L с вершиной M, получим

$$\angle MFO = \angle MKO = \angle MLO = \varphi.$$

Так как прямоугольные треугольники MOE, MOF, MOK и MOL имеют общий катет и по равному острому углу, то эти треугольники равны и тогда

$$OE = OF = OK = OL.$$

Итак, точка O одинаково удалена от сторон трапеции $ABCD$, т. е. в эту трапецию можно вписать окружность с центром в точке O.

Так как MO — перпендикуляр к плоскости ABC, то проекцией треугольника MAB на плоскость ABC является треугольник OAB, т. е.

$$S_{MAB} = \frac{S_{OAB}}{\cos\varphi}.$$

Аналогично проекциями треугольников MBC, MCD и MAD на плоскость ABC являются треугольники OBC, OCD и OAD соответственно. Поэтому

$$S_{MBC} = \frac{S_{OBC}}{\cos\varphi}, \ S_{MCD} = \frac{S_{OCD}}{\cos\varphi} \text{ и } S_{MAD} = \frac{S_{OAD}}{\cos\varphi}.$$

Тогда $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos\varphi}$, и, значит,

$$S_{\text{полн}} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} + S_{ABCD} = \frac{S_{ABCD}(1+\cos\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{2S_{ABCD}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

Итак, задача свелась к вычислению площади трапеции $ABCD$. Проведём в плоскости основания через точки A и D прямые AP и DQ, параллельные прямой LF (точки L и F — середины оснований трапеции). Тогда ясно, что AP и DQ — это перпендикуляры к прямой BC. При этом $PQ = AD = b$, и в прямоугольном треугольнике CDQ

$$CQ = \frac{a-b}{2}.$$

Кроме того, так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + CD$, или $a + b = 2CD$, откуда

$$CD = \frac{a+b}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CDQ находим высоту DQ трапеции:

$$DQ = \sqrt{CD^2 - CQ^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Таким образом, $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot DQ = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$, и, следовательно,

$$S_{\text{полн}} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.$$

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Пример 36. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а её боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдём площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Площадь полной поверхности пирамиды

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

Так как заданная четырёхугольная пирамида правильная, то в её основании лежит квадрат, т. е. $S_{\text{осн}} = a^2$ (рис. 69).

Таким образом, задача свелась к вычислению $S_{\text{бок}}$. Но $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Ph$, где $P = 4a$, и, следовательно, остаётся найти h — апофему боковой грани.

Пусть точка O — основание высоты MO пирамиды $MABCD$. Соединим точку O с точкой A, тогда MA — наклонная к плоскости ABC, а OA — её проекция. Поэтому угол MAO является углом между прямой MA и плоскостью ABC.

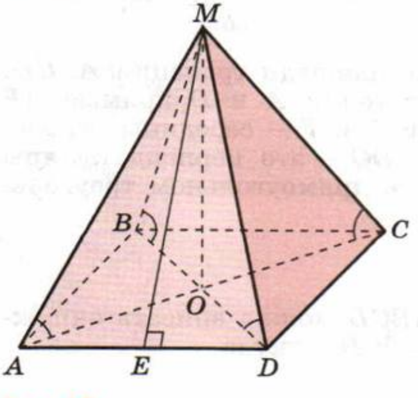


Рис. 69

Следовательно, в прямоугольном треугольнике MOA $\angle MAO = 45°$. Это значит, что и $\angle AMO = 45°$, т. е. $MO = OA$. Так как OA — это половина диагонали квадрата, сторона которого равна a, то $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из прямоугольного треугольника MOA по теореме Пифагора находим, что $MA = a$. Но заданная пирамида правильная, значит, $MD = a$.

Итак, каждая сторона треугольника MAD равна a, поэтому его апофема $ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}, \text{ т. е. } S_{полн} = a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(\sqrt{3}+1).$$

Пример 37. Отношение площади боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды к площади её основания равно $\sqrt{3}:1$. Найдём:

а) угол φ_1, образованный двумя смежными боковыми рёбрами (т. е. плоский угол при вершине пирамиды);

б) угол φ_2, образованный боковым ребром с плоскостью основания;

в) двугранный угол φ_3 при ребре основания;

г) двугранный угол φ_4 при боковом ребре.

Решение. а) Положим сторону основания пирамиды равной a, проведём апофему MK (рис. 70, a).

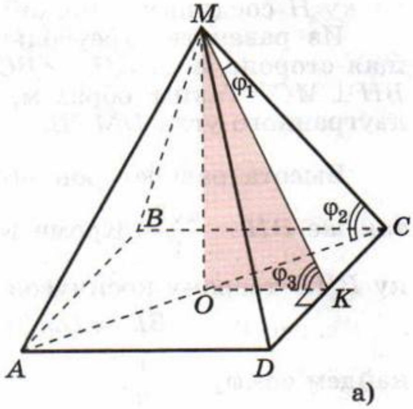
По условию $\frac{S_{бок}}{S_{осн}} = \sqrt{3}:1$, или $\frac{2a \cdot MK}{a^2} = \sqrt{3}$, откуда $MK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

В треугольнике MCD $MC = MD$, и, следовательно, его высота MK является и биссектрисой, т. е. $\angle CMK = \frac{\varphi_1}{2}$. Из прямоугольного треугольника MCK $\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{CK}{MK} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, $\frac{\varphi_1}{2} = 30°$, $\varphi_1 = 60°$.

б) Соединим точку C с центром основания — точкой O. Тогда MO — это перпендикуляр к плоскости основания пирамиды (см. рис. 70, a). Поэтому прямая OC является проекцией прямой MC на плоскость основания, а угол MCO — это угол между прямой MC и плоскостью ABC, т. е. это искомый угол φ_2.

Как выяснено в решении пункта a, $\angle CMD = 60°$. Тогда треугольник MCD равносторонний, и, следовательно, $MC = CD = a$. Ясно также, что $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



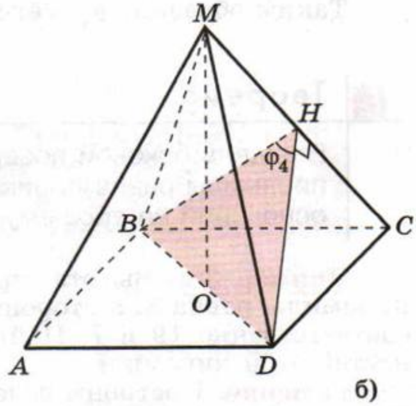


Рис. 70

Из прямоугольного треугольника MCO находим $\cos\varphi_2 = \frac{OC}{MC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это значит, что $\varphi_2 = 45°$.

в) Соединим точку K — середину ребра CD с точкой O — центром основания (см. рис. 70, *а*). Так как MO — это перпендикуляр к плоскости основания и $MK \perp CD$, то и $OK \perp CD$. Это значит, что угол MKO является линейным углом двугранного угла $MCDO$. В прямоугольном треугольнике MKO $\cos\varphi_3 = \frac{OK}{MK} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, $\varphi_3 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

г) Построим линейный угол двугранного угла, ребром которого является прямая MC (рис. 70, *б*). Воспользуемся с этой целью полученным в решении пункта *б* выводом, что треугольник MCD равносторонний. Это значит, что, например, медиана DH треугольника MCD является и его высотой. Итак, проведём медиану DH и точку H соединим с точкой B.

Из равенства треугольников DCH и BCH ($CD = BC$, CH — общая сторона и $\angle DCH = \angle BCH$) заключаем, что $\angle CHD = \angle CHB$, т. е. $BH \perp MC$. Таким образом, угол BHD является линейным углом двугранного угла $DMCB$.

Высота равностороннего треугольника MCD $DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Точно так же $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, $BD = a\sqrt{2}$. Применяя к треугольнику BHD теорему косинусов

$$BD^2 = DH^2 + BH^2 - 2DH \cdot BH\cos\varphi_4,$$

найдём $\cos\varphi_4 = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, $\varphi_4 = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Пример 38. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 8, а стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно 19 и 7. Найдём площади боковой и полной поверхностей этой пирамиды.

Решение. Построим сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через прямую OO_1 (точки O и O_1 — центры нижнего и верхнего оснований пирамиды соответственно) параллельно, например, прямой AD (рис. 71). Четырёхугольник PP_1Q_1Q, который получается в сечении пирамиды плоскостью α, является равнобедренной трапецией, высота которой равна 8, а стороны оснований — 19 и 7. Боковая сторона PP_1 этой трапеции является апофемой заданной пирамиды. Чтобы найти PP_1, проведём в трапеции PP_1Q_1Q через точки P_1 и Q_1 прямые P_1P_1' и Q_1Q_1', параллельные прямой OO_1.

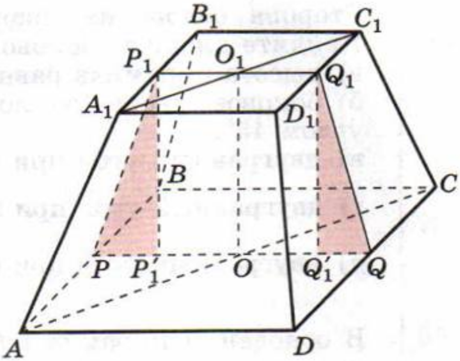


Рис. 71

В прямоугольном треугольнике PP_1P_1' $PP_1' = \frac{19-7}{2} = 6$, $P_1P_1' = 8$ и по теореме Пифагора $PP_1 = \sqrt{36+64} = 10$.

Таким образом,

$$S_{\text{бок}} = \frac{4\cdot 19 + 4\cdot 7}{2}\cdot 10 = 520 \text{ и } S_{\text{полн}} = 361 + 49 + 520 = 930.$$

Задания для самостоятельной работы

86 Из прямоугольника $ABCD$, у которого $AB = 2a$ и $BC = 3a$, удалён прямоугольник $DFKE$ со сторонами $DE = a$ и $DF = 2a$ (точка E лежит на отрезке CD, а точка F — на стороне AD). Полученная Г-образная фигура принята за основание пирамиды $MABCDEK$, одно из рёбер которой перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Найдите площадь боковой поверхности, если перпендикулярным к плоскости основания является ребро:
а) MB; б) MC; в) ME; г) MK; д) MF; е) MA.

87 В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник. Её боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания и равно h. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если:
а) двугранные углы при рёбрах CD и AD равны 30° и 45° соответственно;
б) прямая MD образует с плоскостью основания угол, равный 30°, а с прямой AB угол, равный 60°;
в) прямая MD образует с плоскостью основания угол, равный 45°, а угол между прямыми MA и CD равен 60°;
г) $\angle AMD = 45°$, $\angle CMD = 30°$.

88 Сторона основания правильной пирамида $MABC$ равна a. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если:
а) высота пирамида равна стороне её основания;
б) боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $45°$;
в) двугранный угол при ребре основания равен $60°$;
г) двугранный угол при боковом ребре равен $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;
д) двугранный угол при боковом ребре равен $2a$.

89 В основании пирамиды $MABCD$ лежит трапеция, у которой $BC \parallel AD$, $AB \perp BC$ и $AB = AD = \frac{1}{2} BC = a$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если:
а) ребро MA образует с плоскостью основания угол $45°$;
б) ребро MD образует с плоскостью основания угол $45°$;
в) $\angle BC_1D = 60°$, где точка C_1 — середина ребра MC;
г) угол между прямыми MA и BD равен $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

90 В правильной треугольной пирамиде отношение площади боковой поверхности к площади полной поверхности равно 3 : 4. Найдите:
а) φ_1 — плоский угол при вершине пирамиды;
б) φ_2 — угол наклона бокового ребра к плоскости основания;
в) φ_3 — двугранный угол при ребре основания;
г) φ_4 — двугранный угол при боковом ребре.

91 Все плоские углы при вершине M пирамиды $MABC$ прямые, а отношение её боковых рёбер $MA : MB : MC = 1 : 2 : 8$. Считая $MA = a$, найдите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) площадь основания пирамиды;
в) двугранные углы при рёбрах основания пирамиды.

92 Высота правильной шестиугольной пирамиды равна h, а площадь её боковой грани в три раза меньше площади основания. Найдите:
а) двугранный угол при ребре основания;
б) сторону основания;
в) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
г) площадь боковой поверхности пирамиды;
д) площадь полной поверхности пирамиды;
е) площади диагональных сечений пирамиды;
ж) двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

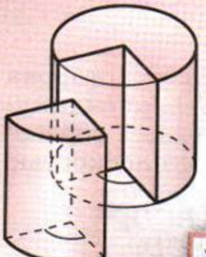
93 Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат, сторона которого равна a. Боковые грани MAB и MBC перпендикулярны к плоскости основания, а двугранные углы, образованные каждой из двух других боковых граней с плоскостью основания, равны α. Найдите:

а) площадь боковой поверхности пирамиды $MABCD$;
б) площадь полной поверхности пирамиды $MABCD$;
в) площадь боковой поверхности пирамиды $MABC$;
г) площадь боковой поверхности пирамиды $MACD$;
д) площадь боковой поверхности пирамиды $MABD$.

94 Стороны основания правильной треугольной усечённой пирамиды равны $2a$ и a.

Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если:

а) боковое ребро пирамиды равно l;
б) высота пирамиды равна h;
в) расстояние от вершины верхнего основания до середины противоположной стороны нижнего основания равно c;
г) расстояние от вершины нижнего основания до середины противоположной стороны верхнего основания равно d;
д) площадь сечения, проходящего через боковое ребро и центр основания, равна Q.



Глава V

Цилиндр. Конус. Шар. Сфера

20. Цилиндр. Площадь его боковой и полной поверхностей

Пусть α и β — две параллельные плоскости, и плоскости α принадлежит окружность $\omega(O; OA)$, которая проходит через точки A, B, C, D, ... Через каждую точку окружности ω проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α. Проведённые прямые пересекают плоскость β в точках A_1, B_1, C_1, ... соответственно. Совокупность отрезков AA_1, BB_1, CC_1, ... образует *цилиндрическую поверхность* (рис. 72). Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, ... называют *образующими цилиндрической поверхности.*

Определение

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами ω и ω_1, называется **цилиндром**.

Цилиндрическая поверхность называется также *боковой поверхностью цилиндра*, а круги, ограниченные окружностями $\omega(O; OA)$ и $\omega_1(O_1; O_1A_1)$ — *основаниями цилиндра*. Прямая OO_1 — это ось цилиндра.

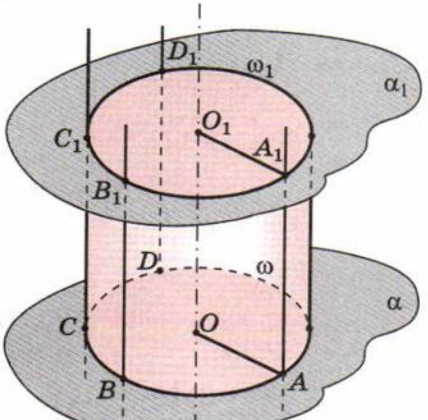


Рис. 72

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. Оно является прямоугольником. На рисунке 73, *а* осевым сечением цилиндра является прямоугольник AA_1B_1B.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной оси, является также прямоугольником.

На рисунке 73, *б* сечением цилиндра является прямоугольник AA_1C_1C. Ясно, что $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, является кругом. Центр этого круга лежит

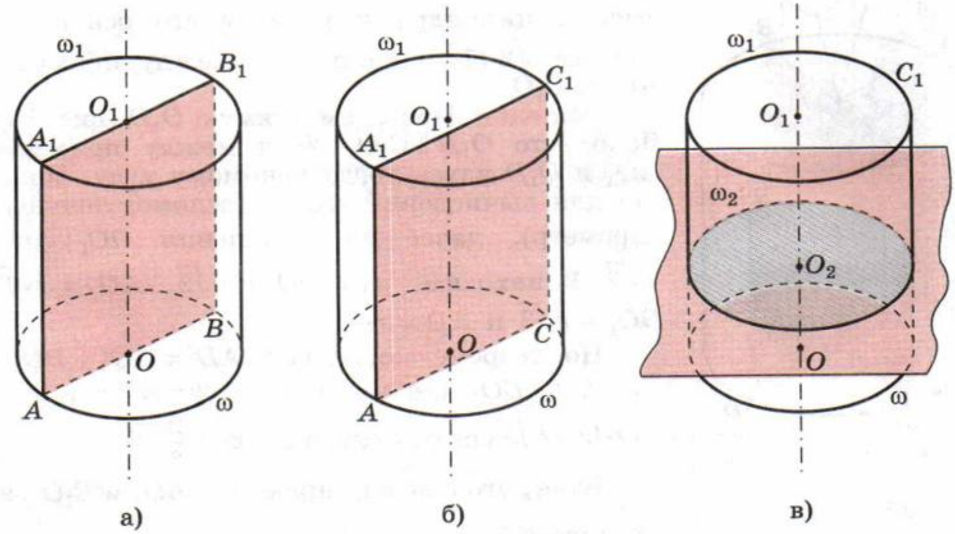


Рис. **73**

на оси цилиндра, а его радиус равен радиусу цилиндра (рис. 73, *в*).

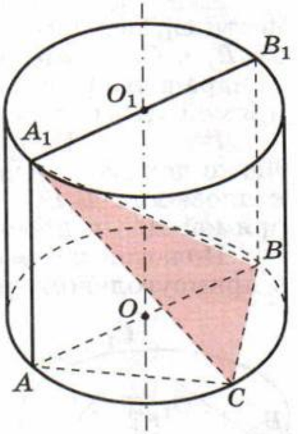


Рис. **74**

Пример 39. Осевым сечением цилиндра является квадрат ABB_1A_1, вершины A и B которого лежат на окружности нижнего основания. Точка C, лежащая на окружности нижнего основания цилиндра, удалена от точки A_1 на 15 см, а от точки B на $\sqrt{31}$ см. Найдём высоту цилиндра.

Решение. Соединим точку C с точками A_1, A и B (рис. 74). Так как вершина C угла ACB лежит на окружности и угол ACB опирается на диаметр этой окружности, то $\angle ACB = 90°$.

Ясно, что отрезок AC является проекцией отрезка A_1C на плоскость нижнего основания цилиндра. При этом $A_1C \perp BC$. Таким образом, в треугольнике A_1CB известны катеты $A_1C = 15$ см и $BC = \sqrt{31}$ см. Тогда его гипотенуза $A_1B = \sqrt{A_1C^2 + BC^2} = 16$ (см).

Отрезок A_1B — диагональ квадрата. Тогда, если x — его сторона, то $x\sqrt{2} = 16$, откуда $x = 8\sqrt{2}$. Таким образом, высота цилиндра $8\sqrt{2}$ см.

Пример 40. В цилиндре проведено осевое сечение AA_1B_1B и перпендикулярное ему осевое сечение CC_1D_1D. Считая отношение

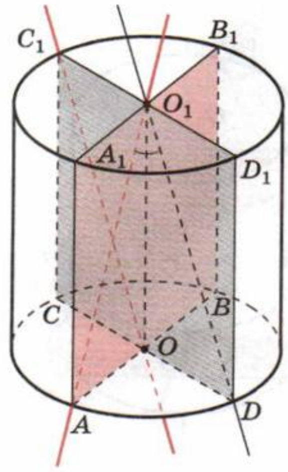


Рис. 75

высоты цилиндра к радиусу его основания равным $\sqrt{2}:1$, найдём угол между прямыми AO_1 и C_1O.

Решение. Проведём прямую O_1D (рис. 75). Ясно, что $O_1D \parallel C_1O$. Угол между прямыми AO_1 и O_1D равен тогда искомому углу. Полагая для вычислений $AO = r$ (вспомогательный параметр), далее из отношения $OO_1 : AO = \sqrt{2}:1$ находим, что $OO_1 = r\sqrt{2}$, $AO_2 = r\sqrt{3}$, $DO_1 = r\sqrt{3}$ и $AD = r\sqrt{2}$.

По теореме косинусов $AD^2 = AO_1^2 + DO_1^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot DO_1 \cdot \cos\varphi$, или $2r^2 = 3r^2 + 3r^2 - 2r\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \frac{2}{3}$.

Итак, угол между прямыми AO_1 и C_1O равен $\arccos\frac{2}{3}$.

Пример 41. Прямая AA_1 — образующая цилиндра. На окружности ω_1, ограничивающей верхнее основание цилиндра, взяты точки B_1 и C_1, такие, что $\smile A_1B_1C_1 = \smile B_1C_1A_1 = 120°$. Считая высоту цилиндра в два раза больше радиуса его основания, найдём угол между прямой AC_1 и плоскостью B_1BC, параллельной оси цилиндра.

Решение. Проведём прямую AO (рис. 76). Пусть $AO \cap BC = H$. Легко доказать, что $AO \perp BC$, и тогда прямая AO перпендикулярна к плоскости B_1BC. Таким образом, угол AC_1H — это угол φ между прямой AC_1 и плоскостью B_1BC, т. е. искомый угол.

Полагая для вычислений $OA = r$, найдём, что тогда $AB = r\sqrt{3}$ и в прямоугольном треугольнике AC_1H

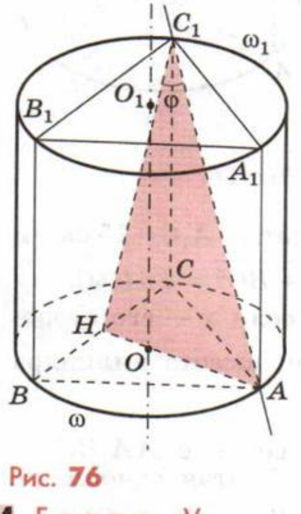


Рис. 76

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AH}{C_1H} = \frac{\frac{3r}{2}}{\sqrt{4r^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{3r}{2}}{\sqrt{4r^2 + \frac{3r^2}{4}}} = \frac{3\sqrt{19}}{19}.$$

Итак, угол между прямой AC_1 и плоскостью B_1BC равен $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{19}}{19}$.

Пример 42. Осевое сечение AA_1C_1C цилиндра перпендикулярно его осевому сечению BB_1D_1D. Считая радиус основания цилиндра равным r, а угол между прямыми AO_1 и C_1D равным 30°, найдём площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение. Проведём прямую C_1O (рис. 77). Так как $AO = C_1O_1$ и $AO \parallel C_1O_1$, то четырёхугольник AO_1C_1O — параллелограмм. Значит, $C_1O \parallel AO_1$. Тогда угол OC_1D равен углу между прямыми AO_1 и C_1D, т. е. $\angle OC_1D = 30°$.

Ясно, что треугольник OC_1D прямоугольный и так как в нём $OD = r$, $\angle OC_1D = 30°$, то $C_1D = 2r$, и тогда $OC_1 = \sqrt{C_1D^2 - OD^2} = r\sqrt{3}$.

Теперь в прямоугольном треугольнике OO_1C_1 $O_1C_1 = r$, $OC_1 = r\sqrt{3}$. Тогда $OO_1 = r\sqrt{2}$.

Итак, высота цилиндра равна $r\sqrt{2}$, а радиус его основания равен r. Следовательно, $S_{бок} = 2\pi r \cdot r\sqrt{2}$, т. е. $S_{бок} = 2\pi r^2\sqrt{2}$.

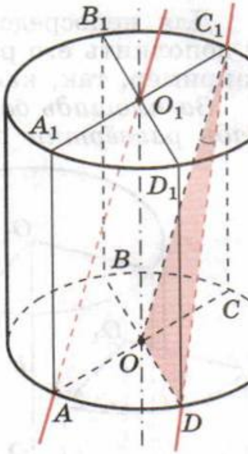


Рис. 77

Если боковую поверхность цилиндра разрезать по какой-нибудь образующей, например по AA_1 (рис. 78, *а*), а затем развернуть на плоскость эту боковую поверхность и два равных круга — основания цилиндра, то получим фигуру, называемую *развёрткой поверхности цилиндра* (короче, *развёрткой цилиндра*) (рис. 78, *б*). Эта развёртка не является связной фигурой. Она представляет собой совокупность двух равных кругов и прямоугольника. Радиус каждого из кругов равен радиусу основания цилиндра, одна из сторон прямоугольника равна длине окружности основания цилиндра, а другая равна высоте цилиндра.

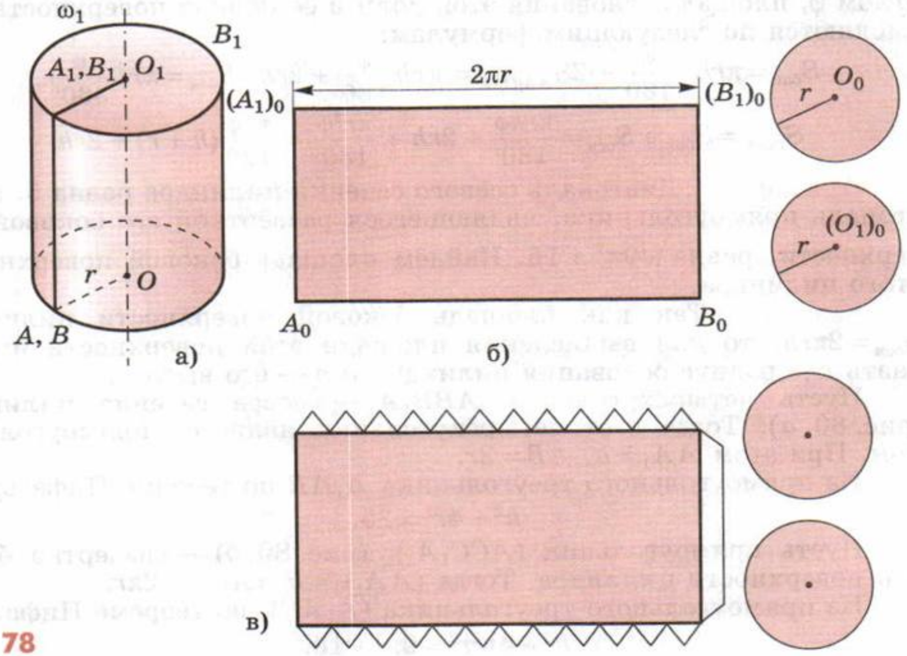


Рис. 78

Для непосредственного изготовления модели цилиндра следует дополнить его развёртку специальными выступами (склейками). Например, так, как это показано на рисунке 78, *в*.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь развёртки этой боковой поверхности (т. е. площадь прямоугольника со сторонами $2\pi r$ и h). Таким образом,

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh.$$

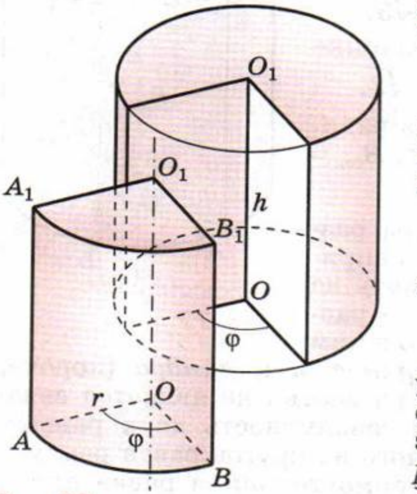


Рис. 79

За площадь основания цилиндра принимается площадь круга, радиус которого равен радиусу основания цилиндра. Таким образом,

$$S_{\text{осн}} = \pi r^2.$$

Следовательно, *площадь полной поверхности цилиндра*

$$S_{\text{полн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Полуплоскостями AOO_1 и BOO_1, угол между которыми равен φ (рис. 79), от цилиндра отделяется фигура, называемая *долей цилиндра* (или *сектором цилиндра*) с центральным углом φ. Угол φ — это угол между полуплоскостями, т. е. $0° < \varphi \leqslant 180°$.

Площадь боковой поверхности доли цилиндра с центральным углом φ, площадь основания этой доли и её полная поверхность вычисляются по следующим формулам:

$$S_{\text{бок}} = \pi rh \cdot \frac{\varphi}{180} + 2S_{AA_1O_1O} = \pi rh\frac{\varphi}{180} + 2rh, \; S_{\text{осн}} = \pi r^2 \frac{\varphi}{360°},$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{\pi rh\varphi}{180} + 2rh + \frac{\pi r^2\varphi}{180} = \frac{\pi r\varphi}{180}(h + r) + 2rh.$$

Пример 43. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 5, а диагональ прямоугольника, являющегося развёрткой его боковой поверхности, равна $\sqrt{9\pi^2 + 16}$. Найдём площадь боковой поверхности этого цилиндра.

Решение. Так как площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$, то для вычисления площади этой поверхности нужно знать r — радиус основания цилиндра и h — его высоту.

Пусть четырёхугольник ABB_1A_1 — осевое сечение цилиндра (рис. 80, *а*). Тогда этот четырёхугольник является прямоугольником. При этом $AA_1 = h$, $AB = 2r$.

Из прямоугольного треугольника A_1AB по теореме Пифагора

$$h^2 + 4r^2 = 25. \qquad (1)$$

Пусть прямоугольник $(ACC_1A_1)_0$ (рис. 80, *б*) — развёртка боковой поверхности цилиндра. Тогда $(AA_1)_0 = h$, $(AC)_0 = 2\pi r$.

Из прямоугольного треугольника $(A_1AC)_0$ по теореме Пифагора

$$h^2 + 4\pi^2r^2 = 9\pi^2 + 16. \qquad (2)$$

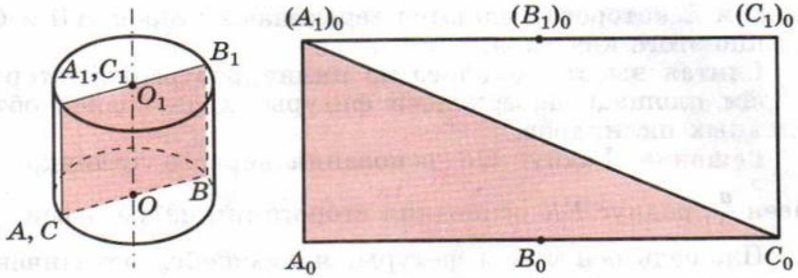


Рис. 80

Таким образом, мы получили систему уравнений (1) и (2). Вычитая почленно уравнение (1) из уравнения (2), находим $4\pi^2r^2 - 4r^2 = 9\pi^2 - 9$, или $4r^2(\pi^2 - 1) = 9(\pi^2 - 1)$, откуда $r^2 = \dfrac{9(\pi^2-1)}{4(\pi^2-1)}$, т. е. $r^2 = \dfrac{9}{4}$, и, следовательно, $r = \dfrac{3}{2}$. Тогда из уравнения (1) находим $h = 4$.

Итак, $S_{бок} = 2\pi \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 4 = 12\pi$.

Пример 44. Плоскостью ABB_1A_1 осевого сечения цилиндра и плоскостью, проходящей через точку O_2 — середину его оси OO_1 параллельно основаниям, от цилиндра отсечена некоторая его часть, как показано на рисунке 81. Найдём площадь поверхности оставшегося ступенчатого тела, если радиус основания цилиндра равен r, а высота его равна h.

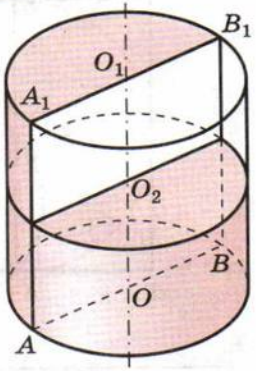


Рис. 81

Решение. S — искомая площадь поверхности представляет собой сумму следующих площадей:

$S_1 = \pi r^2$ — площадь нижнего основания цилиндра;

$S_2 = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ — площадь верхнего основания оставшегося тела;

$S_3 = \dfrac{1}{2}\pi r^2$ — площадь образовавшейся горизонтальной площадки (ступеньки);

$S_4 = \dfrac{3}{4}S_{бок} = \dfrac{3}{4} \cdot 2\pi rh = \dfrac{3}{2}\pi rh$ — площадь оставшейся боковой поверхности цилиндра;

$S_5 = 2r \cdot \dfrac{1}{2}h = rh$ — площадь вертикальной площадки.

Таким образом, $S = \pi r^2 + \dfrac{1}{2}\pi r^2 + \dfrac{1}{2}\pi r^2 + \dfrac{3}{2}\pi rh + rh = 2\pi r^2 + \dfrac{3}{2}\pi rh + rh = \dfrac{r}{2}(4\pi r + 3\pi h + 2h)$.

Пример 45. Заданы два цилиндра. Основание первого из них — окружность $\omega_1(O; OK)$ — вписано в квадрат $ABCD$, а второго — окружность $\omega_2(E; EK)$ — описано около треугольника KLD, вершины K и L которого являются серединами сторон AD и CD соответственно этого квадрата.

Считая высоту каждого из цилиндров равной стороне $AB = a$, найдём площадь поверхности фигуры, являющейся объединением заданных цилиндров.

Решение. Радиус OK основания первого цилиндра (рис. 82, *а*) равен $\frac{a}{2}$, радиус EK основания второго цилиндра равен $\frac{1}{2}KL = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Площадь основания фигуры, являющейся объединением заданных цилиндров (рис. 82, *б*) вычислим как сумму площадей S_1, S_2 и S_3 соответственно трёх фигур: первая из них представляет собой $\frac{3}{4}$ круга $\omega_1(O; OK)$, т. е. $S_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}\pi a^2$; вторая фигура — это прямоугольный треугольник KLD, т. е. $S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$; третья — половина круга $\omega_2(E; EK)$, т. е. $S_3 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{16}$.

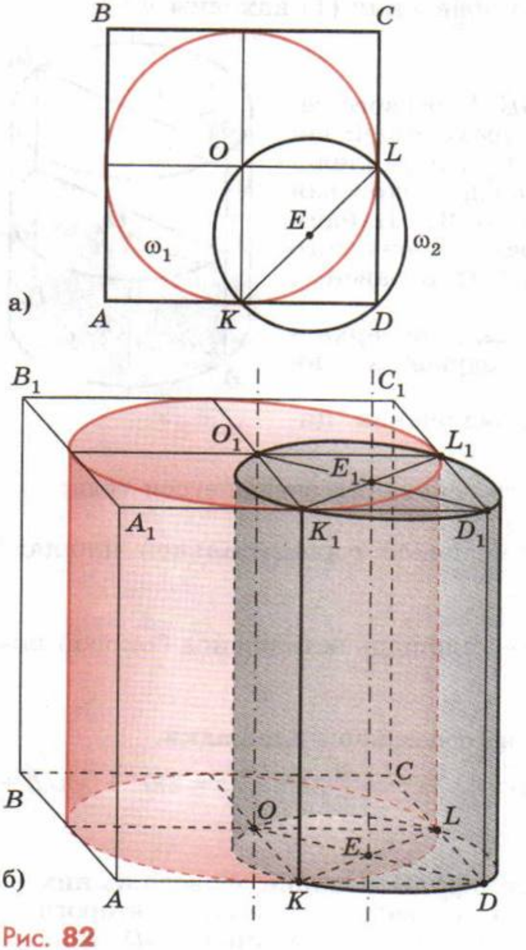


Рис. 82

Таким образом, площадь фигуры, являющейся нижним основанием объединения заданных цилиндров, равна

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{16}\pi a^2 + \frac{a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{16} = \frac{a^2}{8}(2\pi + 1).$$

Понятно, что такую же площадь имеет фигура, представляющая собой верхнее основание объединения заданных цилиндров.

Осталось подсчитать площадь боковой поверхности фигуры, являющейся объединением заданных цилиндров. Эта площадь представляет собой сумму двух площадей: S_4 — это $\frac{3}{4}$ площади боковой поверхности первого цилиндра, т. е. $S_4 = \frac{3}{4} \cdot \left(2\pi \frac{a}{2} \cdot a\right) = \frac{3\pi a^2}{4}$, и

S_5 — половина площади боковой поверхности второго цилиндра, т. е. $S_5 = \frac{1}{2} \cdot \left(2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\right) = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4}$.

Итак, искомая площадь равна

$$S = 2(S_1 + S_2 + S_3) + S_4 + S_5 = 2 \cdot \frac{a^2}{8}(2\pi + 1) + \frac{3\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{a^2}{4}(5\pi + \pi\sqrt{2} + 1).$$

С Задания для самостоятельной работы

95 На окружности верхнего основания цилиндра взяты точки A_1, B_1 и C_1, такие, что хорда $A_1B_1 = 4$ см, хорда $B_1C_1 = 3$ см и угол $A_1B_1C_1$ равен $90°$. Высота цилиндра равна 5 см. Найдите расстояние от точки A — проекции точки A_1 на нижнее основание цилиндра — до точки:
а) O_1 — центра верхнего основания;
б) C_1;
в) D_1 — середины отрезка B_1C_1;
г) M — середины отрезка A_1O (точка O — центр нижнего основания);
д) K — середины отрезка OB_1.

96 Высота цилиндра в два раза больше радиуса его основания. Точками A, B и C окружность нижнего основания цилиндра разделена на три равные части. Образующие, проходящие через эти три точки, пересекают окружность верхнего основания в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите радиус основания и высоту цилиндра, если:
а) периметр треугольника ABC_1 равен 50 см;
б) расстояние от точки C_1 до прямой AB равно 30 см;
в) расстояние от точки B до прямой AC_1 равно 20 см.

97 Окружность верхнего основания цилиндра разделена точками A_1, B_1, C_1 и D_1 на четыре равные части. Точки A, B, C и D — проекции точек A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно на нижнее основание цилиндра. Считая $A_1C_1 = AA_1 = 2a$, найдите расстояние от точки B до прямой:
а) BD_1, б) AC_1; в) AC_2, точка C_2 которой — середина отрезка CC_1; г) A_1C_2; д) DC_2; е) O_1D (точка O_1 — центр верхнего основания); ж) OD_1 (точка O — центр нижнего основания).

98 Через одну образующую цилиндра проведены две секущие плоскости. Площадь каждого из полученных при этом сечений равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра, если двугранный угол, образованный секущими плоскостями, равен: а) $90°$; б) $60°$; в) $120°$; г) 2φ.

99 Сечением цилиндра плоскостью, проходящей через его ось OO_1, является квадрат ABB_1A_1. На одной из дуг верхнего основания взяты точки C_1, D_1 и E_1, такие, что $\smile B_1C_1 = \smile C_1D_1 = \smile D_1E_1 = \smile E_1A_1$. Найдите углы между указанными прямыми и плоскостями.

1) Между прямой AC_1 и прямой:
а) BB_1; б) A_1B_1; в) BA_1; г) BD_1; д) BE_1; е) BO_1; ж) B_1O.

2) Между плоскостью ABB_1 и прямой:
а) AC_1; б) AD_1; в) AE_1; г) OC_1; д) OD_1; е) OE_1.

3) Между плоскостью ABB_1 и плоскостью:
а) ABC_1; б) ABD_1; в) ABE_1; г) AE_1C_1; д) AB_1D_1.

100 Площадь осевого сечения цилиндра равна 8 см^2, а площадь его основания — 2 см^2. Найдите площади сечений цилиндра:
а) плоскостью, проходящей через одну из образующих, принадлежащих осевому сечению, и образующую с ней угол 60°;
б) плоскостью, перпендикулярной плоскости осевого сечения и проходящей через середину радиуса, принадлежащего осевому сечению;
в) плоскостью, параллельной оси цилиндра и отстоящей от неё на 1 м.

101 В основании цилиндра, высота которого равна h, проведена хорда AB. Считая $AB = a$ и $\angle AOB = 2\varphi$, найдите:
а) площадь осевого сечения цилиндра;
б) площадь боковой поверхности цилиндра;
в) площадь полной поверхности цилиндра.

102 Диагональ прямоугольника в развёртке боковой поверхности цилиндра равна d. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если отношение сторон прямоугольника равно:
а) 1 : 1; б) 1 : 2; в) $m : n$.

103 Цилиндр, высота которого равна a, и цилиндр, высота которого равна b, имеют развёртками своих боковых поверхностей равные прямоугольники.
Найдите отношение $a : b$, если отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров равно: а) 1 : 1; б) 2 : 1; в) 1 : 3.

104 Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра равна d и образует угол φ с основанием развёртки. Найдите:
а) площадь основания цилиндра;
б) площадь осевого сечения цилиндра;
в) площадь боковой поверхности цилиндра;
г) площадь полной поверхности цилиндра.

21. Конус. Площадь его боковой и полной поверхностей

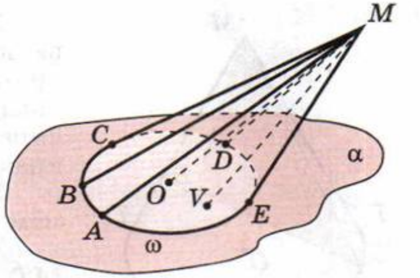


Рис. 83

Пусть окружность $\omega (O; OA)$ лежит в плоскости α. Возьмём вне плоскости α точку M и соединим её с точками A, B, C, ... окружности ω. Совокупность всех отрезков MA, MB, MC, ... называют *конической поверхностью* (рис. 83), а отрезки MA, MB, MC, ... — *образующими конической поверхности.*

Определение

Конусом называют тело, которое содержит все точки A, B, C, ... круга Ω, ограниченного окружностью ω; точку M, лежащую вне плоскости круга Ω, и все отрезки, соединяющие точку M с точками круга Ω.

Круг Ω и точку M называют *основанием конуса* и его *вершиной*, отрезки MA, MB, MC, ... называют *образующими конуса.*

На рисунке 83 круг Ω, ограниченный окружностью ω с центром в точке O — основание конуса; точка M — его вершина, отрезок MA, точка A которого является точкой окружности ω — образующая конуса; отрезок MV, точка V которого является точкой круга Ω, — это отрезок, принадлежащий конусу.

Если прямая, проходящая через вершину M конуса и точку O — центр его основания, перпендикулярна к плоскости основания, то конус называют *прямым* (рис. 84).

В школьном курсе геометрии рассматривается только прямой конус. Поэтому вместо слов «прямой конус» мы в дальнейшем говорим просто «конус».

Понятно, что *высотой конуса* является отрезок, соединяющий его вершину M с центром основания — точкой O.

Отметим ещё, что прямую, содержащую высоту конуса, называют его осью. На рисунке 84 отрезок MO — высота конуса, прямая MO — его *ось.*

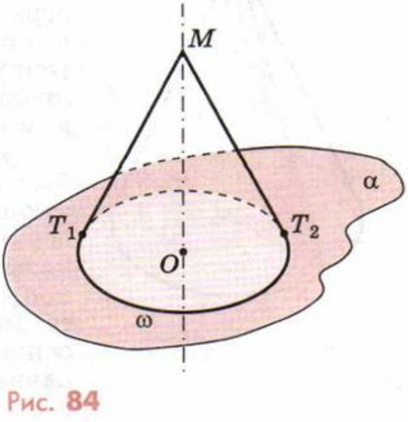


Рис. 84

Одно из наиболее часто употребляемых изображений конуса легко выполнить следующим образом (рис. 85):

1) построим эллипс, являющийся изображением круга — основания конуса;

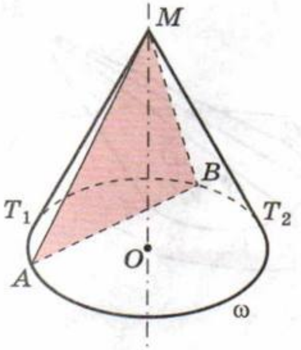


Рис. **85**

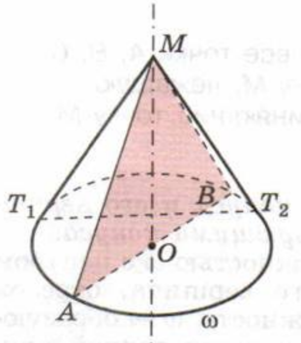


Рис. **86**

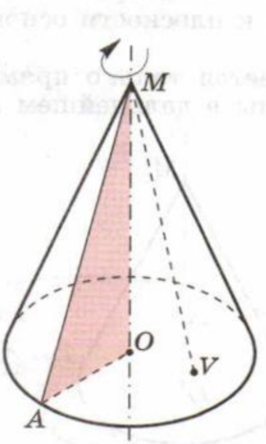


Рис. **87**

2) построим изображение перпендикуляра к плоскости основания конуса, проходящего через точку O — центр эллипса CB (для наглядности изображение этого перпендикуляра проведём параллельно вертикальному краю страницы);

3) на проведённом перпендикуляре возьмём произвольную точку M;

4) из точки M проведём касательные MT_1 и MT_2 к эллипсу. На этом изображение конуса завершено.

Отметим, что если на окружности ω основания конуса взяты две точки, например A и B (см. рис. 85), то образующими MA и MB определена секущая плоскость MAB.

Сечением конуса этой плоскостью является равнобедренный треугольник MAB ($MA = MB$). Если, в частности, точки A и B являются диаметрально противоположными точкам окружности ω, то точка O — центр основания — принадлежит хорде AB. Таким образом, в этом случае треугольник MAB является осевым сечением конуса (рис. 86).

Заметим ещё, что если MT_1 и MT_2 — касательные к эллипсу, проведённые из точки M (см. рис. 86), то хорда T_1T_2 через точку O не проходит.

Конус можно получить, вращая прямоугольный треугольник вокруг прямой, проходящей через один из его катетов. Так, при вращении прямоугольного треугольника MOA, например вокруг катета MO (рис. 87), получим тело, состоящее из точек круга, ограниченного окружностью ω с центром в точке O и радиусом, равным катету OA, точку M — вершину конуса и совокупность отрезков MV, соединяющих точку M с точками этого круга.

Разрежем боковую поверхность конуса MOA (рис. 88, a) по какой-нибудь его образующей, например MA, и развернём эту поверхность на плоскость. Полученную фигуру называют *развёрткой боковой поверхности конуса*. Она представляет собой круговой сектор (рис. 88, $б$). При этом если радиус основания конуса равен r, а его образующая равна l, то радиус этого кругового сектора равен l, а длина его дуги равна $2\pi r$.

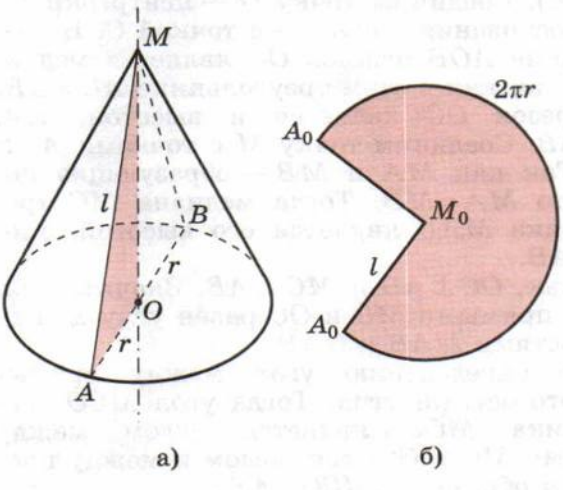


Рис. 88

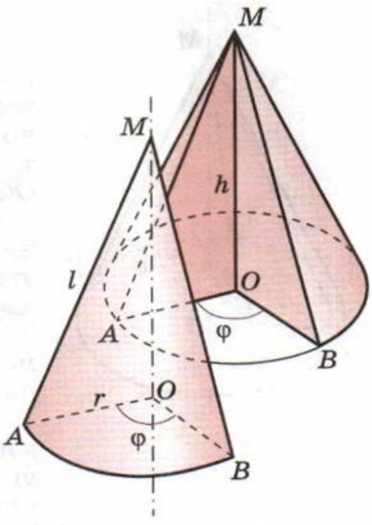


Рис. 89

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь его развёртки:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l,$$

где r — радиус основания конуса, а l — длина его образующей. Площадь полной поверхности конуса

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}, \text{ где } S_{\text{осн}} = \pi r^2.$$

Полуплоскостями MOA и MOB, угол между которыми равен φ, от конуса отделяется фигура, называемая **долей конуса** (или **сектором конуса**) с центральным углом φ (рис. 89).

Угол φ — это угол между полуплоскостями, т. е. $0° < \varphi \leqslant 180°$.

Если радиус основания конуса равен r, его образующая равна l, а высота равна h, то площадь боковой поверхности доли конуса с центральным углом φ, площадь основания этой доли и её полная поверхность вычисляются по следующим формулам:

$$S_{\text{бок}} = \pi r l \cdot \frac{\varphi}{360} + 2S_{MOA} = \frac{\pi r l \varphi}{360} + rh, \ S_{\text{осн}} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360},$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{\pi r \varphi}{360}(l + r) + rh.$$

Пример 46. Хорда AB делит окружность основания конуса в отношении $1 : 2$. Радиус основания конуса равен r. Найдём площадь сечения конуса плоскостью MAB, которая образует с плоскостью основания угол, равный $45°$.

Решение. Пусть меньшая дуга окружности основания конуса содержит x градусов. Тогда её большая дуга содержит $2x$ градусов. Таким образом, $3x = 360$, откуда $x = 120$. Итак, $\angle AOB = 120°$.

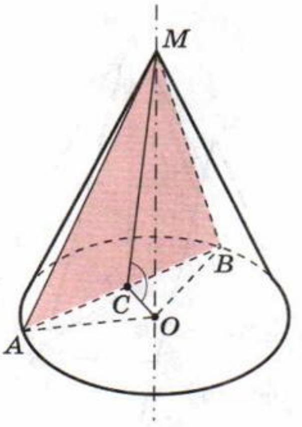


Рис. 90

Построим точку C — середину хорды AB (рис. 90). Соединим точку O — центр окружности основания конуса — с точкой C. В треугольнике AOB отрезок OC является медианой, а так как в этом треугольнике $AO = OB$, то отрезок OC является и высотой, т. е. $OC \perp AB$. Соединим точку M с точками A, B и C. Так как MA и MB — образующие конуса, то $MA = MB$. Тогда медиана MC треугольника MAB является его высотой, т. е. $MC \perp AB$.

Итак, $OC \perp AB$ и $MC \perp AB$. Значит, угол между прямыми MC и OC равен углу между плоскостями MAB и OAB.

По определению угол между прямыми — это острый угол. Тогда угол MCO треугольника MOC является углом между прямыми MC и OC, т. е. углом и между плоскостями MAB и OAB. Таким образом, $\angle MCO = 45°$.

Чтобы вычислить площадь треугольника MAB, найдём его основание AB и высоту MC. Из треугольника OAB получаем $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 120°$, или $AB^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, откуда $AB = r\sqrt{3}$.

По теореме Пифагора находим далее, что в треугольнике AOC

$$AO^2 = AC^2 + OC^2, \text{ или } r^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + OC^2, \text{ откуда } OC = \frac{r}{2}.$$

Так как в прямоугольном треугольнике MOC угол MCO равен $45°$, то $MO = OC = \frac{r}{2}$ и, следовательно, $MC = OC\sqrt{2}$. Таким образом, $MC = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Итак, в треугольнике MAB известны основание и высота. Тогда

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{6}}{4}.$$

Пример 47. Точками A, B, C и D окружность основания конуса разделена на 4 равные части. На образующих MB и MC взяты точки B_1 и C_1 соответственно — их середины. Найдём угол между прямыми AB_1 и DC_1, если угол BMD равен $90°$.

Решение. Найдём искомый угол векторно-координатным способом. Зададим с этой целью прямоугольную систему координат в пространстве. За начало координат возьмём точку O — центр основания конуса, координатные оси Ox, Oy и Oz выберем, как показано на рисунке 91. В качестве единицы измерения отрезков возьмём, например, отрезок, равный радиусу окружности основания конуса.

В этой системе координат имеем $O(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$.

Так как по условию $\angle BMD = 90°$, то $MO = OD$. Тогда $M(0; 0; 1)$.

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$, коллинеарных прямым AB_1 и DC_1 соответственно. Для этого найдём координаты точек A, B_1 и C_1. Получаем $A(0; -1; 0)$, $B(-1; 0; 0)$, $B_1\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $C_1\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Итак, $\overrightarrow{AB_1}\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ и $\overrightarrow{DC_1}\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом,

$$\cos(\widehat{AB_1\, DC_1}) = |\cos \widehat{AB_1\, DC_1}| =$$

$$= \frac{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) + 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{5}{6}.$$

Следовательно, искомый угол равен $\arccos\frac{5}{6}$.

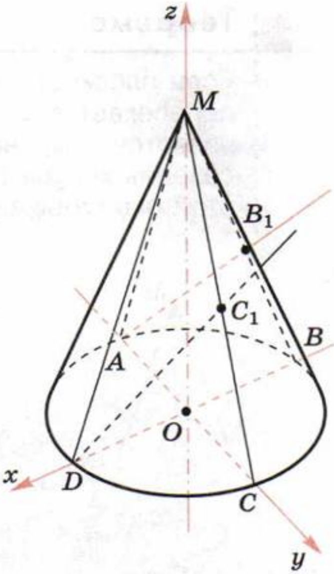


Рис. 91

Пример 48. Высота конуса равна 3, а его образующая равна 5. Найдём угол сектора, являющегося развёрткой боковой поверхности конуса.

Решение. Из прямоугольного треугольника MOA (рис. 92, *а*) находим радиус основания конуса $OA = \sqrt{MA^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Тогда длина окружности основания конуса $l = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$.

Значит, длина дуги сектора $(MAmB)_0$ равна 8π (рис. 92, *б*). Эта длина во столько раз меньше длины окружности радиуса $(MA)_0 = 5$, во сколько раз искомый угол φ сектора $(MAmB)_0$ меньше $360°$.

Так как длина окружности радиуса $(MA)_0 = 5$ равна $2\pi \cdot 5$, т. е. равна 10π, то получаем уравнение

$$\varphi : 360° = 8\pi : 10\pi,$$

из которого находим

$$\varphi = \frac{8 \cdot 360°}{10} = 288°.$$

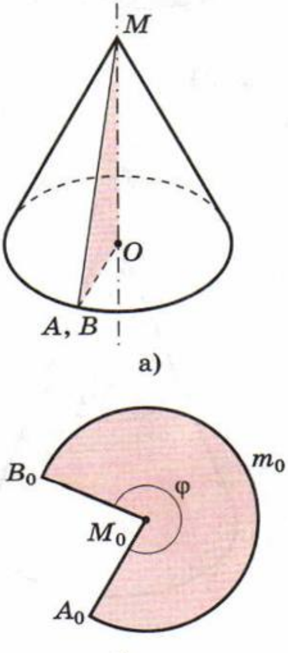


Рис. 92

Теорема

Если плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает его боковую поверхность, то линией пересечения является окружность с центром на оси конуса, а площадью сечения конуса этой плоскостью является круг, ограниченный этой окружностью.

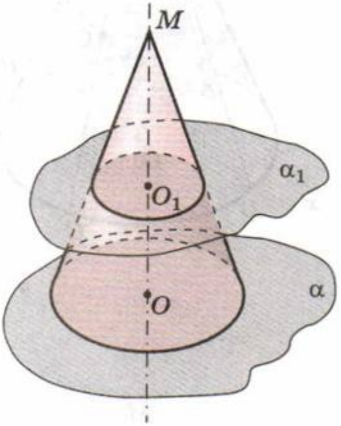


Рис. 93

Так, на рисунке 93 плоскость α_1 параллельна плоскости α. Она пересекает боковую поверхность конуса по окружности, центр которой лежит на оси конуса. Эта окружность ограничивает круг, являющийся пересечением конуса с плоскостью α_1.

Плоскость α_1, параллельная плоскости основания конуса, отсекает от него тело, которое представляет собой усечённый конус (см. рис. 93). Круг, полученный в пересечении плоскости α_1 с конусом, — это верхнее основание усечённого конуса, нижним основанием которого является основание исходного конуса.

Отрезок, соединяющий центр верхнего основания усечённого конуса с центром его нижнего основания, называется *высотой* усечённого конуса.

Отрезки образующих конуса, заключённые между основаниями усечённого конуса, называются его *образующими*. Понятно, что все эти образующие равны между собой.

Часть боковой поверхности конуса, заключённая между плоскостями α и α_1, — это *боковая поверхность усечённого конуса*.

Усечённый конус можно получить вращением прямоугольной трапеции вокруг оси, проходящей через её боковую сторону, перпендикулярную основаниям (рис. 94).

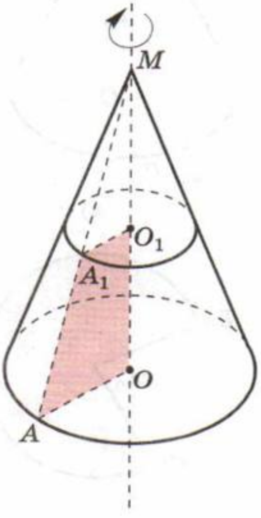


Рис. 94

Развёртка боковой поверхности усечённого конуса представляет собой фигуру, закрашенную на рисунке 95. Сектор $(MAmB)_0$ — это развёртка боковой поверхности конуса MOA, а сектор $(MAnB)_0$ — развёртка боковой поверхности конуса MO_1A_1, отсечённого от конуса MOA плоскостью, проходящей через точку O_1 параллельно плоскости основания конуса.

За площадь боковой поверхности усечённого конуса принимается площадь его развёртки.

Если радиусы оснований усечённого конуса $AO = r$, $A_1O_1 = r_1$, а его образующая $AA_1 = l$, то площадь боковой поверхности этого усечённого конуса

$$S_{\text{бок}} = \pi (r + r_1) l.$$

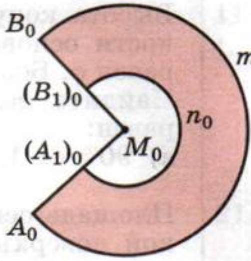


Рис. 95

Задания для самостоятельной работы

105 Осевым сечением конуса является правильный треугольник, сторона которого равна r. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен:
а) $90°$; б) $60°$; в) $45°$; г) $30°$; д) φ.

106 Хорда AB делит окружность основания конуса в отношении $1:5$. Высота конуса равна h. Найдите площадь сечения конуса плоскостью MAB, которая образует с плоскостью основания угол, равный:
а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$; г) φ.

107 Точками A, B, C и D окружность основания конуса разделена на четыре равные части. На образующей MC взята точка C_1 — её середина. Найдите угол между прямыми AC_1 и MD, если угол AMC равен:
а) $90°$; б) $60°$; в) $120°$.

108 Радиус основания конуса равен 6, а его высота MO равна 8. Плоскостями MOA и MOB, угол между которыми равен φ, из конуса вырезана коническая доля $MOAmB$, в основании которой лежит криволинейный треугольник $OAmB$. Найдите площадь боковой поверхности тела, получившегося после удаления доли конуса, если угол φ равен:
а) $36°$; б) $72°$; в) $90°$; г) $135°$.

109 Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, дуга которого AmB содержит φ градусов. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если угол φ равен:
а) $36°$; б) $45°$; в) $72°$; г) $90°$; д) $120°$; е) $180°$; ж) $270°$.

110 Высота конуса равна h. На каком расстоянии от вершины следует провести секущую плоскость, параллельную плоскости основания, чтобы площадь сечения была в n раз меньше площади основания? Рассмотрите случай, когда n равно:
а) 2; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\frac{q}{p}$.

111 Высота конуса в 2 раза меньше его образующей. На окружности основания взяты точки A и B, такие, что угол AOB равен φ. Боковая поверхность конуса развёрнута на плоскость. Найдите величину угла AMB на развёртке, если угол φ равен:
а) 90°; б) 120°; в) 180°.

112 Площадь основания конуса в k раз меньше площади его полной поверхности. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания, если k равно:
а) 3; б) $\sqrt{5}$; в) π.

113 Угол между образующими в осевом сечении конуса равен φ. Площадь этого сечения равна Q. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если угол φ равен:
а) 60°; б) 90°; в) 45°.

22. Шар и сфера

Определение

Шаром называется тело, представляющее собой совокупность точек пространства, удалённых от данной точки на расстояние, не большее данного. Данная точка называется **центром шара**, а данное расстояние — его **радиусом**. **Сферой** называется поверхность, представляющая собой совокупность точек пространства, удалённых от данной точки на данное расстояние. Данная точка называется **центром сферы**, а данное расстояние — её **радиусом**.

Сферу называют также *шаровой поверхностью* или *поверхностью шара.*

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности, называется её *хордой*. Хорда шаровой поверхности является также хордой шара, ограниченного этой шаровой поверхностью.

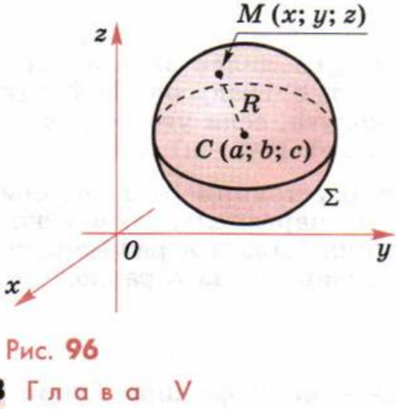


Рис. 96

Хорда шара, проходящая через его центр, называется *диаметром шара*, а концы диаметра, лежащие на поверхности шара, называются *диаметрально противоположными точками шара.*

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью шара.*

Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

является уравнением сферы Σ с центром в точке $C\,(a; b; c)$ и радиусом, равным R (рис. 96).

Если, в частности, центром сферы является точка O — начало прямоугольной системы координат $Oxyz$, то уравнение сферы имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Пример 49. Сфера с центром в точке $C\,(3; -1; 0)$ проходит через точку $P\,(5; 2; -3)$.

Составим уравнение сферы.

Решение. Уравнение сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ при заданных координатах точки C — её центра — принимает вид $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=R^2$.

Так как эта сфера проходит через точку $P\,(5; 2; -3)$, то $(5-3)^2+$ $+(2+1)^2+(-3)^2=R^2$, откуда $R=\sqrt{22}$.

Итак, искомое уравнение сферы $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=22$.

Пример 50. Составим уравнение сферы, проходящей через следующие точки: $A\,(2; 0; 0)$, $B\,(0; 3; 0)$, $C\,(-2; 0; 0)$ и $P\,(0; 0; 3)$.

Решение. Подставим в уравнение сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+$ $+(z-c)^2=R^2$, центром которой является точка $P\,(a; b; c)$, поочерёдно координаты точек A, B, C и D.

Получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными a, b, c и R:

$$\begin{cases} (2-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2 = R^2 & (1)\\ (0-a)^2+(3-b)^2+(0-c)^2 = R^2 & (2)\\ (-2-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2 = R^2 & (3)\\ (0-a)^2+(0-b)^2+(3-c)^2 = R^2. & (4)\end{cases}$$

Заменим уравнения (1)—(4) этой схемы их комбинациями. Например, такими:

$$\begin{cases} (1)-(4)\\ (2)-(3)\\ (1)-(3)\\ (2)-(4).\end{cases}$$

Таким образом, мы получим более простую систему уравнений:

$$\begin{cases} -4a+6c-5=0\\ -4a-6b+5=0\\ a=0\\ b-c=0.\end{cases}$$

Из этой системы находим $a=0$; $b=c=\dfrac{5}{6}$. Центр сферы имеет координаты $\left(0; \dfrac{5}{6}; \dfrac{5}{6}\right)$.

Тогда радиус этой сферы легко вычислить. Например, из уравнения (1) получаем

$$(2-0)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2=R^2,$$

откуда $R^2=\frac{97}{18}$. Итак, искомое уравнение

$$x^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+\left(z-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{97}{18}.$$

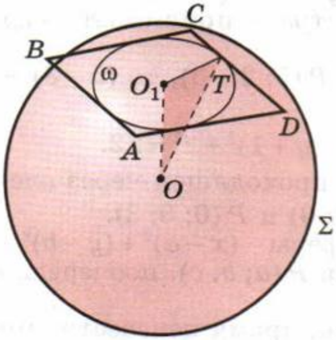


Рис. 97

Пример 51. Сторона ромба равна a. Сфера, радиус которой равен R, касается всех сторон ромба. Расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно b. Найдём площадь ромба.

Решение. Пусть сфера Σ касается всех сторон ромба $ABCD$ (рис. 97). Сечением сферы Σ плоскостью, в которой лежит ромб, является окружность. Назовём её ω. Понятно, что точки касания сторон ромба со сферой Σ являются точками касания этого ромба с окружностью ω.

Пусть центром сферы Σ является точка O, а центром окружности ω — точка O_1. Точка O_1 в таком случае является основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ромба. А это значит, что прямая OO_1 перпендикулярна к любой прямой плоскости ромба. В частности, $OO_1 \perp CD$.

Если прямая CD касается сферы Σ в точке T, то $OT \perp CD$. Из двух последних предложений заключаем, что прямая CD перпендикулярна к двум пересекающимся прямым OO_1 и OT. Поэтому она перпендикулярна к любой прямой плоскости OO_1T. Например, $CD \perp O_1T$.

Таким образом, отрезок O_1T — это радиус окружности ω.

Из прямоугольного треугольника OO_1T находим $O_1T = \sqrt{OT^2-OO_1^2}=\sqrt{R^2-b^2}$.

Тогда площадь ромба $ABCD$ $S = CD\cdot(2O_1N)=2a\sqrt{R^2-b^2}$.

Пример 52. Найдём радиус сферы, проходящей через вершины A, B и C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, а также через точку O_1 — центр его верхнего основания.

Решение. Решим задачу координатным методом. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Bxyz$, оси которой выберем, как показано на рисунке 98. В качестве единицы измерения в ней примем отрезок, равный ребру куба.

В этой системе координат имеем $B\,(0;\,0;\,0)$, $A\,(a;\,0;\,0)$, $C\,(0;\,a;\,0)$ и $B_1\,(0;\,0;\,a)$. Найдём ещё $O_1\left(\frac{a}{2};\,\frac{a}{2};\,a\right)$.

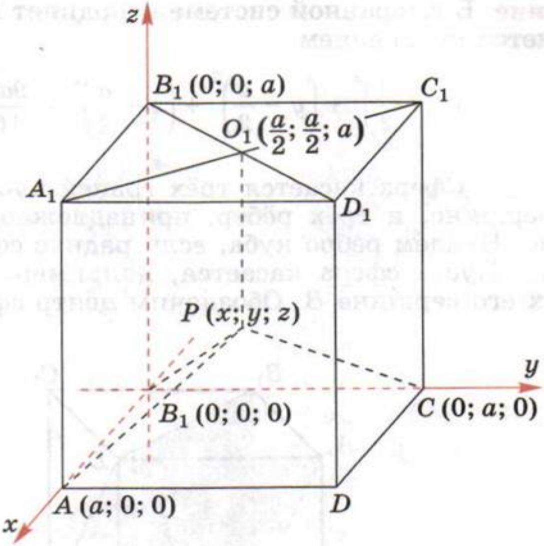


Рис. 98

Пусть некоторая точка P является центром сферы, радиус которой требуется найти. Тогда $PA = PB$, $PC = PB$ и $PO_1 = PB$.

Найдём координаты $(x; y; z)$ точки P. Так как

$$PB = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \ PA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2},\ \ PC = \sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2},$$

$$PO_1 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + (z-a)^2},$$

то получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + (z-a)^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

Решим эту систему. Получим

$$\begin{cases} -2ax + a = 0 \\ -2ay + a = 0 \\ -ax + \frac{a^2}{4} - ay + \frac{a^2}{4} - 2az + a^2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{a}{4}$.

Таким образом, центром сферы является точка $P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{4}\right)$.

Тогда радиус этой сферы равен $PB = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$.

Замечание. В выбранной системе координат $Bxyz$ заданная сфера определяется уравнением

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{4}\right)^2=\frac{9a^2}{16}.$$

Пример 53. Сфера касается трёх граней куба, принадлежащих одной его вершине, и трёх рёбер, принадлежащих противоположной вершине. Найдём ребро куба, если радиус сферы равен R.

Решение. Пусть сфера касается, например, граней куба, принадлежащих его вершине B. Обозначим центр сферы P (рис. 99).

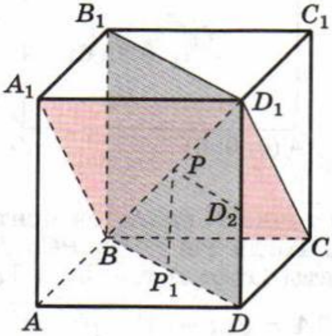


Рис. 99

Так как сфера касается граней B_1BCC_1 и $ABCD$, то точка P принадлежит множеству точек, одинаково удалённых от плоскостей этих граней, т. е. диагональной плоскости B_1BDD_1 куба.

Аналогично так как сфера касается граней B_1BCC_1 и $BADC$, то точка P принадлежит диагональной плоскости BCD_1A_1 куба.

Итак, точка P принадлежит плоскостям B_1BDD_1 и BCD_1A_1. Значит, она принадлежит линии пересечения этих плоскостей, т. е. диагонали BD_1 куба.

По условию сфера касается также трёх рёбер куба, принадлежащих вершине D_1. Обозначим D_2 — точку касания сферы с ребром DD_1 и P_1 — точку касания сферы с плоскостью ABC.

Так как точки D_1 и P_1 — это точки касания сферы с прямыми DD_1 и BD соответственно, то $PD_2 \perp DD_1$ и $PP_1 \perp BD$, т. е. $PD_2 \perp BD$ и $PP_1 \parallel DD_1$. Тогда $\triangle D_1PD_1 \sim \triangle D_1BD$. Поэтому $\dfrac{D_1D_2}{D_1D}=\dfrac{PD_2}{BD}$.

Полагая ребро куба равным x, находим, что тогда $BD=x\sqrt{2}$. Так как $DD_2=PP_1=PD_2=R$, то $\dfrac{x-R}{x}=\dfrac{R}{x\sqrt{2}}$, откуда $x=\dfrac{R(2+\sqrt{2})}{2}$.

Итак, ребро куба равно $\dfrac{R(2+\sqrt{2})}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

114 Сфера с центром в точке C проходит через точку P.
1) Напишите уравнение сферы, если:
а) $C(1; 2; 4)$, $P(0; 0; 0)$;
б) $C(-2; 0; 3)$, $P(1; 5; -2)$;
в) $C(0; 0; 0)$, $P(1; 2; -3)$.
2) Найдите координаты точки O — центра сферы и её радиус, если сфера задана уравнением:
а) $x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$;
б) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$;
в) $2x^2+2y^2+2z^2+4x-8y-4z-18=0$.

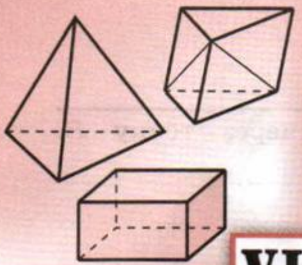
115 Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника ABC, если:
а) $R=8$ см, $AB=BC=AC=6$ см;
б) $R=10$ см, $AB=16$ см, $\angle BCA=90°$;
в) $R=13$ см, $AB=6$ см, $BC=8$ см, $AC=12$ см.

116 Шар радиуса R пересечён плоскостью, удалённой от его центра на расстояние, равное d. Найдите площадь сечения шара, если:
а) $R=41$ см, $d=9$ см;
б) $R=10$ см, $d=5$ см;
в) $R=5$ см, $d=4$ см.

117 Шар радиуса R пересечён плоскостью, проходящей через конец радиуса, лежащий на сфере, под углом α к нему. Найдите площадь полученного сечения, если угол α равен:
а) 60°; б) 45°; в) 30°.

118 Считая ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равным 1, найдите радиус сферы, проходящий через следующие точки:
а) A, A_1, B_1 и C;
б) A, B, B_1 и C_2 — середину ребра CC_1;
в) A, B, C_2 — середину ребра CC_1 и D_2 — точку ребра DD_1, такую, что $DD_2 : DD_1 = 3 : 4$.

119 Считая ребро куба равным a, найдите радиус сферы, о которой известно, что она:
а) касается четырёх рёбер куба, принадлежащих одной его грани, и противоположной грани;
б) проходит через середины трёх рёбер куба, принадлежащих одной вершине (например, B), и через вершину, ей противоположную;
в) касается трёх рёбер куба, принадлежащих одной вершине, и проходит через вершину, ей противоположную.



Глава VI Объёмы многогранников

23. Объём параллелепипеда

Каждое тело занимает часть пространства. Одной из характеристик тела является *объём* занимаемой им части пространства.

Каждому телу можно поставить в соответствие положительное число, называемое объёмом этого тела. При этом выполняются следующие *свойства объёма*:

1) если тела равны, то их объёмы равны;

2) если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел;

3) если задана единица длины, то объём куба, ребро которого равно этой единице, равен одной кубической единице.

Объём прямоугольного параллелепипеда

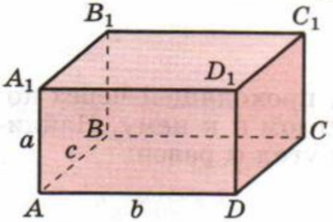


Рис. 100

Если параллелепипед прямоугольный, то его объём может быть вычислен либо как произведение трёх его рёбер, принадлежащих одной вершине, либо как произведение площади любой грани на ребро, перпендикулярное к этой грани. Есть и другие способы вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда.

Так, объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 100), рёбра a, b и c которого принадлежат одной вершине, равен abc, т. е. $V = abc$.

Если $ab = S$, то $V = Sc$; если $ac = P$, то $V = Pb$; если $bc = Q$, то $V = Qa$.

Объём прямого параллелепипеда

Если параллелепипед прямой, то его объём можно вычислить как произведение площади грани, принятой за основание, на ребро, перпендикулярное к этой грани. Так, если площадь грани параллелепипеда, принятой за его основание, равна S, а перпендикулярное ей боковое ребро равно c, то $V = Sc$.

Объём наклонного параллелепипеда

Если параллелепипед наклонный, то все его грани параллелограммы. Объём наклонного параллелепипеда равен произведению площади любой его грани на высоту параллелепипеда, перпендикулярную к этой грани.

24. Объём призмы

Теорема

Объём призмы равен произведению площади её основания на высоту.

Пример 54. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 40 см², а площадь её боковой поверхности равна 24 см². Найдём объём этой призмы.

Решение. Объём призмы $V = S_{осн} \cdot h$. Пусть сторона основания заданной призмы равна x, а её высота равна y. Тогда $S_{бок} = 3y = 24$, т. е.

$$xy = 8 \tag{1}$$

и $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 24 + 2S_{осн} = 40$, т. е. $S_{осн} = 8$. Но $S_{осн} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Таким образом,

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 8. \tag{2}$$

Решим систему, составленную из уравнений (1) и (2). Получаем $x = \frac{8}{y}$, $x^2\sqrt{3} = 32$. Тогда $\frac{64\sqrt{3}}{y^2} = 32$, откуда $y^2 = 2\sqrt{3}$, т. е. $y = \sqrt{2\sqrt{3}}$. Таким образом, $V = 8\sqrt{2\sqrt{3}}$ (см³).

Пример 55. Площади боковых граней прямой призмы равны 3, 4 и 5 см² соответственно, а площадь её основания равна 24 см². Найдём объём призмы.

Решение. Пусть стороны основания призмы равны x, y и z, а её высота равна h. Тогда в соответствии с условием получим

$$\begin{cases} hx = 3 \\ hy = 4 \\ hz = 5 \\ \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = 24, \end{cases}$$

где $p = \frac{x+y+z}{2}$.

Подставляя в последнее уравнение полученной системы значения x, y и z, выраженные из первых трёх её уравнений, и значение p, выраженное через x, y и z, получим уравнение относительно h:

$$\sqrt{\frac{6}{h}\left(\frac{6}{h} - \frac{3}{h}\right)\left(\frac{6}{h} - \frac{4}{h}\right)\left(\frac{6}{h} - \frac{5}{h}\right)} = 24.$$

Принимая во внимание, что $h > 0$, из полученного уравнения находим $h = \frac{1}{2}$. Тогда объём призмы $V = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12$ (см³).

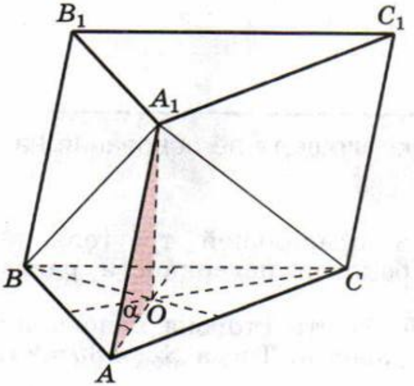


Рис. **101**

Пример 56. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник, сторона которого равна a. Вершина A_1 призмы одинаково удалена от вершин A, B и C, а угол между боковым ребром призмы и плоскостью её основания равен α. Найдём объём призмы.

Решение. Пусть A_1O — перпендикуляр к плоскости ABC (рис. 101). Соединим точку O с вершинами A, B и C. Полученные таким образом прямоугольные треугольники A_1OA, A_1OB и A_1OC равны, так как A_1O — их общий катет и равны гипотенузы A_1A, A_1B и A_1C этих треугольников. Тогда и $OA = OB = OC$. При этом так как отрезок OA является проекцией наклонной A_1A на плоскость ABC, то угол между прямой A_1A и плоскостью ABC равен α, т. е. $\angle A_1AO = \alpha$.

Перейдём к вычислениям. Объём призмы $V = S_{осн} \cdot h$. Так как основанием заданной призмы является правильный треугольник со стороной, равной a, то $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Так как отрезок A_1O — это перпендикуляр из точки одного основания на плоскость другого, то этот отрезок равен высоте призмы.

Но из прямоугольного треугольника A_1OA имеем $A_1O = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha$, где отрезок AO равен $\dfrac{2}{3}$ медианы основания, т. е. $AO = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Итак, $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a^3}{4} \operatorname{tg}\alpha$.

Определение

Два тела называются **равновеликими**, если их объёмы равны.

Пример 57. В основании параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны a и $2a$. Найдём высоту этого параллелепипеда, если известно, что он равновелик прямой треугольной призме, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами $3a$ и $\dfrac{a}{2}$, а её боковое ребро равно $4a$.

Решение. Пусть высота заданного параллелепипеда равна x. Тогда V_1 — его объём и

$$V_1 = \left(\frac{1}{2}a \cdot 2a\right)x, \text{ т. е. } V_1 = a^2x.$$

Так как заданная призма является прямой, то её высота равна боковому ребру. Таким образом, объём V_2 треугольной призмы

$$V_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot 4a = 3a^2.$$

По условию параллелепипед и призма равновелики. Это значит, что $V_1 = V_2$, т. е. $a^2x = 3a^2$, откуда $x = 3a$.

Итак, заданные параллелепипед и призма равновелики, если высота параллелепипеда равна $3a$. (Обратите внимание: является заданный параллелепипед прямым или наклонным, несущественно.)

25. Объём пирамиды

Теорема

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту.

Пример 58. В основании пирамиды $MABCD$ лежит ромб $ABCD$, угол BCD которого равен 60°. Боковое ребро MC пирамиды является её высотой. Считая $AB = a$, $MC = 2a$, найдём объём пирамиды:
а) $BMCD$; б) $AMCD$; в) B_1MCD, где точка B_1 — середина ребра MB; г) A_1MCD, если точка A_1 — середина ребра MA.

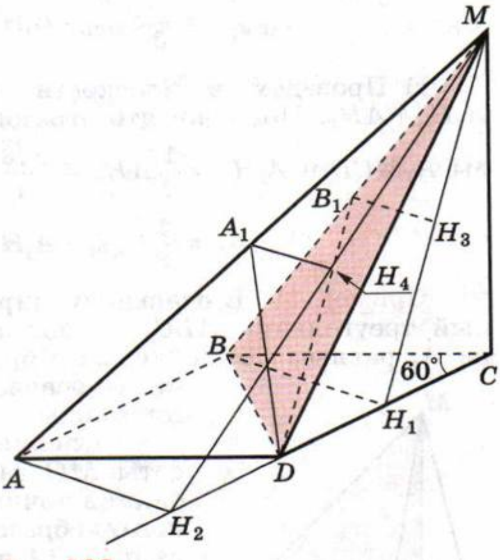


Рис. 102

Решение. Так как искомыми объёмами являются объёмы тех пирамид, в основании которых лежит прямоугольный треугольник MCD, площадь которого равна $\frac{1}{2}a \cdot 2a = a^2$, то задача сводится к вычислению высоты каждой из четырёх указанных пирамид (рис. 102).

а) Высотой пирамиды $BMCD$ является перпендикуляр, опущенный из вершины B на плоскость MCD.

Проведём диагональ BD ромба $ABCD$. Так как $BC = CD$ и $\angle BCD = 60°$, то треугольник BCD является равнобедренным, т. е. его медиана BH_1 является и высотой. Понятно, что так как MC — высота пирамиды $MABCD$, то прямая MC перпендикулярна любой прямой плоскости ABC и, в частности, $MC \perp BH_1$.

Итак, $BH_1 \perp MC$ (по доказанному) и $BH_1 \perp CD$ (по построению). Значит, BH_1 — это перпендикуляр к плоскости MCD, т. е. BH_1 — высота пирамиды $BMCD$. Легко найти, что $BH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$V_{BMCD} = \frac{1}{3}S_{MCD} \cdot BH_1 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

б) Ясно, что высотой пирамиды $AMCD$ является отрезок AH_2, параллельный и равный отрезку BH_1, т. е. $AH_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$V_{AMCD} = \frac{1}{3}S_{MCD} \cdot AH_2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

в) Проведём в плоскости MBH_1 через точку B_1 прямую $B_1H_3 \parallel BH_1$. Понятно, что $B_1H_3 = \frac{1}{2}BH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ и B_1H_3 — высота пирамиды B_1MCD. Тогда

$$V_{B_1MCD} = \frac{1}{3}S_{MCD} \cdot B_1H_3 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

г) Проведём в плоскости MAH_2 через точку A_1 прямую $A_1H_4 \parallel AH_2$. Понятно, что отрезок A_1H_4 является высотой пирамиды A_1MCD и $A_1H_4 = \frac{1}{2}AH_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Тогда

$$V_{A_1MCD} = \frac{1}{3}S_{MCD} \cdot A_1H_4 = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Пример 59. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = c$ и углом при вершине A, равным 30°. Боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом 45°. Найдём объём пирамиды.

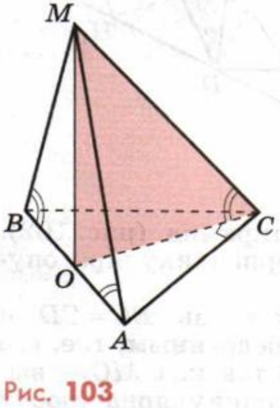


Рис. 103

Решение. Пусть точка O — основание высоты MO заданной пирамиды (рис. 103). Соединив точку O с вершиной A, получим угол MAO, образованный наклонной MA и её проекцией OA на плоскость ABC. Таким образом, $\angle MAO = 45°$.

Аналогично, соединив точку O с точками B и C, получим $\angle MBO = \angle MCO = 45°$. Тогда по катету и острому углу равны треугольники MAO, MBO и MCO. Следовательно, $OA = OB = OC$. Итак, точка O одинаково удалена от вершин прямоугольного треугольника ABC, значит, точка O — середина гипотенузы AB треугольника ABC.

Для вычисления объёма $V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot MO$ пирамиды найдём S_{ABC} и высоту MO пирамиды. В прямоугольном треугольнике ABC находим $AC = AB\cos 30° = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin 30° = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$.

Так как CO — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая к его гипотенузе, то $CO = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$. В прямоугольном треугольнике MOC $\angle MCO = 45°$, т. е. $MO = CO = \frac{c}{2}$. Получаем

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^3\sqrt{3}}{48}.$$

Пример 60. На ребре AB правильной пирамиды $MABC$ взята точка D — середина этого ребра. Считая угол между прямыми MB и CD равным φ и $AB = a$, найдём объём этой пирамиды.

Решение (рис. 104). Объём пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$. Будем считать основанием заданной пирамиды треугольник ABC. Тогда $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, и, таким образом, задача сводится к вычислению высоты MO пирамиды.

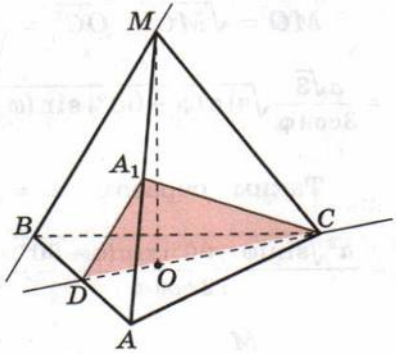


Рис. 104

Выполним некоторые дополнительные построения. В плоскости MAB через точку D проведём прямую, параллельную прямой MB, и точку пересечения построенной прямой с прямой AM обозначим A_1.

Таким образом, $A_1D \parallel MB$. Тогда угол между пересекающимися прямыми A_1D и CD равен углу между скрещивающимися прямыми MB и CD, т. е. равен φ.

Соединим точку A_1 с точкой C. Получим треугольник A_1CD, сторона CD которого является медианой равностороннего треугольника ABC, т. е. $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Пусть боковое ребро пирамиды $MABC$ равно x.

Так как CA_1 — медиана треугольника MAC, то по теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма $(2CA_1)^2 + MA^2 = 2(AC^2 + MC^2)$, или $4CA_1^2 + x^2 = 2(a^2 + x^2)$, откуда $CA_1^2 = \frac{2a^2 + x^2}{4}$, а $CD^2 + A_1D^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{x^2}{4}$.

Сравнивая CA_1^2 и $CD^2 + A_1D^2$, обнаруживаем, что $CA_1^2 < CD^2 + A_1D^2$, откуда следует, что $\angle A_1DC$ острый. Значит, именно этот угол треугольника A_1DC равен углу между прямыми MB и CD, т. е. равен φ.

Применим к треугольнику A_1CD теорему косинусов:

$$CA_1^2 = A_1D^2 + CD^2 - 2A_1D \cdot CD \cos\varphi,$$

или

$$\frac{2a^2 + x^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos\varphi,$$

откуда $x = \dfrac{a}{2\sqrt{3}\cos\varphi}$.

Итак, $MC = \dfrac{a}{2\sqrt{3}\cos\varphi}$.

Из прямоугольного треугольника MOC найдём теперь высоту MO:

$$MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12\cos^2\varphi} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3 - 12\cos^2\varphi}}{6\cos\varphi} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\varphi}\sqrt{\sin(\varphi - 60^\circ)\sin(\varphi + 60^\circ)} = \frac{a^2\sqrt{3\sin(\varphi - 60^\circ)\sin(\varphi + 60^\circ)}}{12\cos\varphi}.$$

Таким образом, $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\varphi}\sqrt{\sin(\varphi - 60^\circ)\sin(\varphi + 60^\circ)} =$

$$= \frac{a^2\sqrt{\sin(\varphi - 60^\circ)\sin(\varphi + 60^\circ)}}{12\cos\varphi}.$$

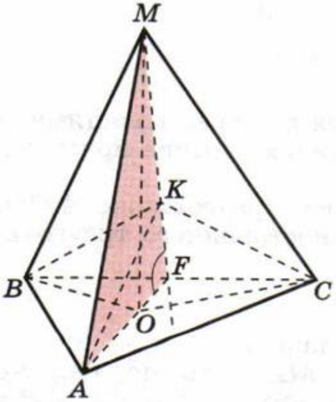


Рис. 105

Пример 61. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до плоскости противоположной ей грани равно h, а двугранный угол при ребре основания равен φ. Найдём объём пирамиды.

Решение. Пусть $MABC$ — заданная пирамида (рис. 105), AK — перпендикуляр, опущенный из вершины A на плоскость MBC, и $AK = h$. Соединим точку K с точками B и C. Тогда AB и AC — наклонные к плоскости MBC, а BK и CK — проекции этих наклонных на ту же плоскость. Но $AB = AC$. Значит, и $BK = CK$.

Таким образом, точка K принадлежит множеству точек плоскости MBC, одинаково удалённых от точек B и C. Этим множеством является прямая MF, проходящая через вершину M пирамиды и точку F — середину стороны BC.

Ясно, что отрезок MF является и перпендикуляром к стороне BC. Соединим точку F с точкой A. Так как $MF \perp BC$ и $AF \perp BC$, то угол MFA является линейным углом двугранного угла MFA при ребре BC пирамиды, поэтому $\angle MFA = \varphi$.

Перейдём к вычислениям. Заметим, что если искать объём V пирамиды $MABC$ традиционным путём, то следовало бы обратиться к формуле $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MO$.

Однако в рассматриваемом примере уже известна высота AK пирамиды, опущенная на плоскость MBC. Поэтому объём V можно искать по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{MBC} \cdot AK = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi} \cdot AK = \frac{1}{9} \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi} \cdot h.$$

Итак, задача сводится к вычислению AB. Из прямоугольного треугольника AFK

$$AF = \frac{AK}{\sin\varphi} = \frac{h}{\sin\varphi}.$$

Но $AF = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $AB = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\varphi}$, и, значит,

$$V = \frac{\left(\frac{2h}{\sqrt{3}\sin\varphi}\right)^2 \cdot h\sqrt{3}}{36\cos\varphi} = \frac{2h^3\sqrt{3}}{27\sin\varphi\sin 2\varphi}.$$

Пример 62. На рёбрах AB, AC и AM пирамиды $MABC$ взяты соответственно точки B_1, C_1 и M_1, такие, что $AB_1 : AB = k$, $AC_1 : AC = l$, $AM_1 : AM = m$. Найдём отношение объёмов многогранников, получающихся при пересечении пирамиды плоскостью $M_1B_1C_1$.

Решение. Пусть V — объём пирамиды $MABC$, V_1 — объём пирамиды $M_1AB_1C_1$ (рис. 106). Найдём отношение $\frac{V_1}{V - V_1}$.

Возьмём в плоскости ABC точку O и будем считать, что MO — высота пирамиды $MABC$. Проведём в плоскости MAO прямую $M_1O_1 \parallel MO$. Тогда M_1O_1 — высота пирамиды $M_1AB_1C_1$.

Чтобы придать вычислениям, к которым мы переходим, более простой вид, введём обозначения: $AB = b$, $AC = c$, $MO = h$, $\angle BAC = \varphi$.

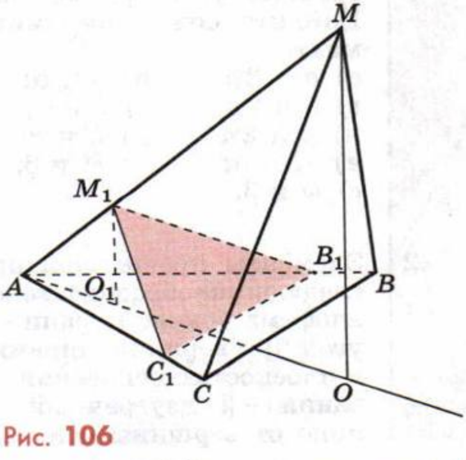


Рис. 106

Тогда $AB_1 = kb$, $AC_1 = lc$. Из подобия треугольников AM_1O_1 и AMO имеем $M_1O_1 : MO = AM_1 : AM = m$. Таким образом, $M_1O_1 = mh$.

Подсчитаем теперь V и V_1:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot MO = \frac{1}{6}bch\sin\varphi,$$

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{AB_1C_1} \cdot M_1O_1 = \frac{1}{6}AB_1 \cdot AC_1 \cdot M_1O_1 \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{6}kb \cdot lc \cdot m \cdot h\sin\varphi = \frac{1}{6}klmbch\sin\varphi.$$

Тогда искомое отношение

$$\frac{V}{V - V_1} = \frac{\frac{1}{6}klmbch\sin\varphi}{\frac{1}{6}bch\sin\varphi(1 - klm)} = \frac{klm}{1 - klm}.$$

С Задания для самостоятельной работы

120 Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при ребре основания равен b. Найдите объём пирамиды, если:
а) $n = 3$, $\beta = 30°$, $45°$, $60°$; б) $n = 4$, $\beta = 30°$, $45°$, $60°$; в) $n = 6$, $\beta = 30°$, $45°$, $60°$.

121 Элементы правильной четырёхугольной пирамиды обозначены следующим образом: сторона основания — a, боковое ребро — b, апофема боковой грани — h, высота пирамиды — H, площадь диагонального сечения — Q, плоский угол при вершине — 2γ, угол между боковым ребром и плоскостью основания — α, двугранный угол при ребре основания — β, двугранный угол при боковом ребре — 2φ.
Найдите объём пирамиды, если известны следующие элементы:

а) a и 2γ;	б) a и α;	в) a и β;	г) a и 2φ;
д) b и 2γ;	е) b и α;	ж) b и β;	з) b и 2φ;
и) h и 2γ;	к) h и α;	л) h и β;	м) H и 2φ;
н) H и α;	о) H и β;	п) H и 2φ;	р) Q и α;
с) Q и β.			

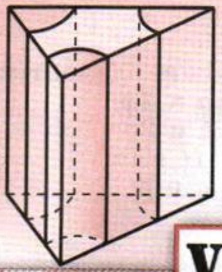
122 Элементы правильной прямоугольной пирамиды обозначены следующим образом: сторона основания — a, боковое ребро — b, апофема боковой грани — h, высота пирамиды — H, плоский угол при вершине пирамиды — γ, угол между боковым ребром и плоскостью основания — α, двугранный угол при ребре основания — β, двугранный угол при боковом ребре — 2φ, расстояние от вершины основания до противоположной грани — q.

Найдите объём пирамиды, если известны следующие элементы:

а) a и α; б) a и β; в) a и γ; г) a и 2φ;
д) b и α; е) b и β; ж) b и γ; з) b и 2φ;
и) h и α; к) h и β; л) h и γ; м) H и α;
н) H и β; о) H и γ; п) H и 2φ; р) q и β;
с) q и γ.

123 Найдите объём пирамиды, каждое боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом α, если в основании пирамиды лежит:

а) прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом, равным 30°, 45°, 60°;
б) прямоугольный треугольник со сторонами a и b.



Глава **VII**

Объёмы тел вращения. Площадь сферы

26. Объём цилиндра и доли цилиндра

Теорема

Объём цилиндра равен произведению площади его основания S на высоту H:

$$V = Sh.$$

Если радиус основания цилиндра равен r, то

$$V = \pi r^2 \cdot h.$$

Объём доли цилиндра с центральным углом φ равен

$$V = \pi R^2 h \frac{\varphi}{360}.$$

Пример 63. Ребро куба, вписанного в цилиндр, равно a. Найдём объём цилиндра.

Решение. Из условия следует, что высота цилиндра равна ребру вписанного в него куба, а диагональное сечение куба является и осевым сечением цилиндра (рис. 107). Поэтому диаметр основания цилиндра $2r = a\sqrt{2}$, откуда $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

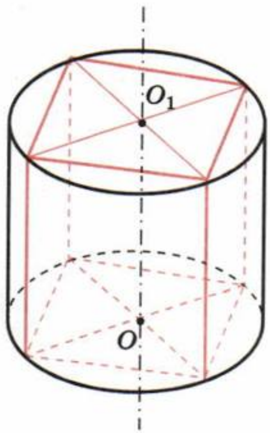
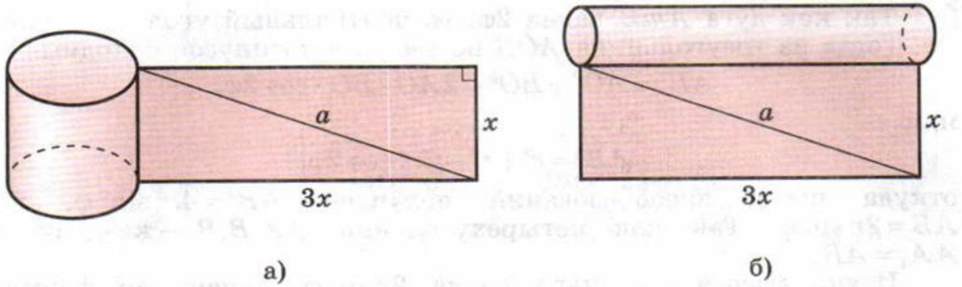


Рис. 107

Таким образом, объём цилиндра

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Пример 64. Развёрткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с отношением сторон 1 : 3. Диагональ этого прямоугольника равна a. Найдём объём цилиндра.



а) б)

Рис. 108

Решение. Пусть одна из сторон прямоугольника-развёртки равна x. Тогда другая сторона равна $3x$, и по условию $x^2 = 9x^2 = a^2$, или $10x^2 = a^2$, откуда $x = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Так как одна из сторон прямоугольника равна высоте цилиндра, то возможно два случая:

1) высота цилиндра равна меньшей стороне прямоугольника;
2) высота цилиндра равна большей стороне прямоугольника.

1-й случай (рис. 108, *а*). Высота цилиндра $h_1 = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$. Тогда длина окружности основания цилиндра $2\pi r_1 = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$, откуда $r_1 = \dfrac{3a\sqrt{10}}{20\pi}$. В этом случае объём равен

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \frac{9a^2\sqrt{10}}{400\pi^2}.$$

2-й случай (рис. 108, *б*). Высота цилиндра $h_2 = \dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$. Тогда длина окружности основания цилиндра $2\pi r_2 = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$, откуда $r_2 = \dfrac{a\sqrt{10}}{20\pi}$. В этом случае объём цилиндра равен

$$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \frac{3a^2\sqrt{10}}{400\pi^2}.$$

Пример 65. Основанием цилиндра является окружность радиуса r, а сечением этого цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является квадрат. От окружности основания секущая плоскость отсекает дугу 2φ. Найдём объём цилиндра.

Решение. Пусть сечением цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является квадрат AA_1B_1B (рис. 109).

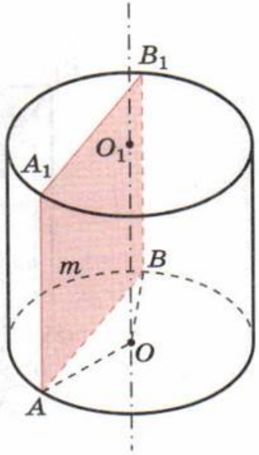


Рис. 109

Так как дуга AmB равна 2φ, то центральный угол AOB равен 2φ. Тогда из треугольника AOB по теореме косинусов находим

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 2\varphi,$$

или

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 2\varphi,$$

откуда после преобразований получаем $AB^2 = 4r^2 \sin^2 \varphi$, т. е. $AB = 2r \sin \varphi$. Так как четырёхугольник AA_1B_1B — квадрат, то $AA_1 = AB$.

Итак, высота цилиндра равна $2r \sin \varphi$. Теперь по формуле $V = \pi r^2 h$ находим объём цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot 2r \sin \varphi = 2\pi r^3 \sin \varphi.$$

Пример 66. От правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой равно стороне её основания, отсечены три цилиндрические доли, как показано на рисунке 110, *а*. Считая $AB = a$, $AK = BL = CM = \frac{a}{4}$ (рис. 110, *б*), найдём объём полученного тела.

Решение. Объём призмы $V_1 = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Объём одной цилиндрической доли

$$V = \frac{\pi r^2 h \cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2 h}{6} = \frac{\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot a}{6} = \frac{\pi a^3}{96}.$$

Тогда объём полученного тела

$$V = V_1 - 3V_2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\pi a^3}{96} = \frac{a^3}{32}(8\sqrt{3} - \pi).$$

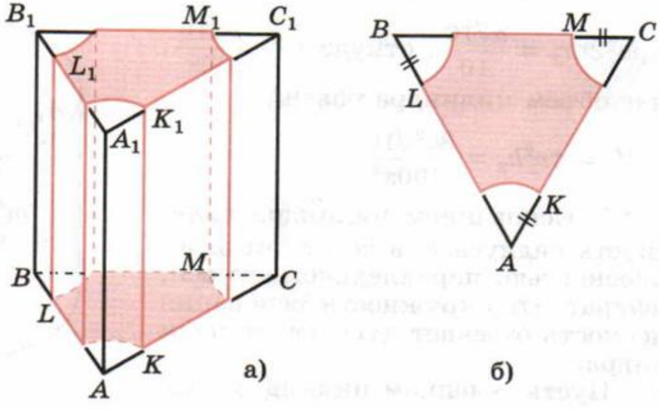


Рис. 110

Пример 67. Высота цилиндра равна h, а радиус равен r. Осевые сечения AA_1B_1B и CC_1D_1D цилиндра взаимно перпендикулярны. Найдём объём той части цилиндра, которая остаётся после удаления из него доли, ограниченной плоскостями O_1OC, O_1OC, и сегмента, основанием которого является четырёхугольник B_1BCC_1.

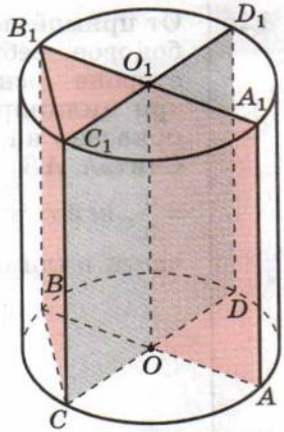


Рис. 111

Решение. Так как плоскость O_1OC перпендикулярна к плоскости O_1OA (рис. 111), то V_1 — объём части, удалённой из цилиндра с помощью этих плоскостей, представляет собой четверть объёма цилиндра, т. е. $V_1 = \frac{1}{4}\pi r^2 h$.

Так как плоскость O_1OB перпендикулярна к плоскости O_1OC, то V_2 — объём цилиндрического сегмента, ограниченного этими плоскостями, равен разности между V_3 — объёмом доли, ограниченной плоскостями O_1OB и O_1OC, и V_4 — объёмом прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник OBC, а боковое ребро равно h. Получаем

$$V_3 = \frac{1}{4}\pi r^2 h, \quad V_4 = \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot OO_1 = \frac{1}{2}r^2 h.$$

Таким образом,

$$V_2 = \frac{\pi r^2 h}{4} - \frac{r^2 h}{2}.$$

Итак, V — искомый объём части цилиндра, оставшейся после удаления из него заданной доли и заданного сегмента, равен

$$V = \pi r^2 h - V_1 - V_2 = \pi r^2 h - \frac{1}{4}\pi r^2 h - \left(\frac{1}{4}\pi r^2 h - \frac{1}{2}r^2 h\right) =$$

$$= \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{r^2 h}{2} = \frac{r^2 h}{2}(\pi + 1).$$

С Задания для самостоятельной работы

124 Сечением цилиндра плоскостью α, параллельной его оси, является прямоугольник AA_1B_1B с отношением сторон $AA_1 : AB = 3 : 2$. Плоскость α делит окружность основания в отношении $1 : 2$. Найдите объём цилиндра, если:
а) радиус основания равен r;
б) высота основания равна h;
в) диагональ прямоугольника AA_1B_1B равна d.

125 От прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой равно стороне основания, отсечены три цилиндрические доли, как показано на рисунке 112. Считая $AB = a$, $AK = BL = CM = \frac{a}{3}$, найдите объём оставшейся части цилиндра.

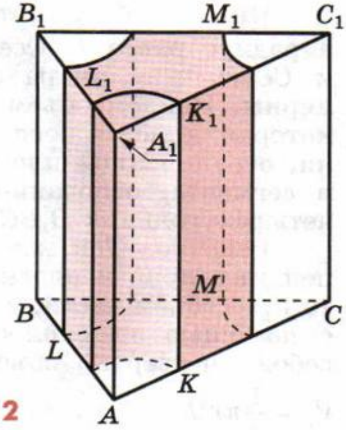


Рис. **112**

126 От куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отсечены четыре цилиндрические доли, как показано на рисунке 113. Считая ребро куба равным a, найдите объём полученного тела.

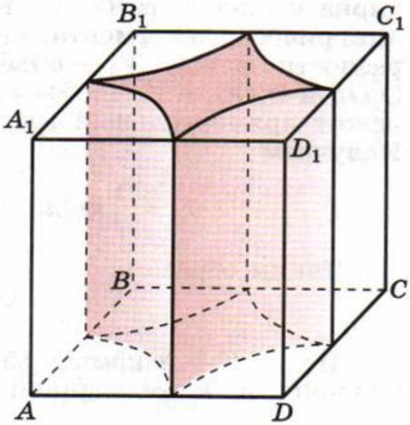


Рис. **113**

127 Высота каждого из цилиндров (рис. 114, *а—д*) равна h, а радиус основания — r. Через точку O_2 — середину оси OO_1 каждого из цилиндров — проведена параллельно плоскости основания секущая плоскость. Затем в каждом из цилиндров проведены другие секущие плоскости. Секущими плоскостями от цилиндров отсечены различные тела. Найдите объём оставшихся от цилиндра тел, если:

а) $\smile A_1mB_1 = 180°$;
б) $\smile A_1mB_1 = 240°$;
в) $\smile A_1mB_1 = 270°$;
г) $\smile A_1mB_1 = 180°$; $\smile C_1kD_1 = 90°$;
д) $A_1mB_1 = 90°$, $\smile B_1kD_1 = 90°$, точка C_1 — середина радиуса O_1B_1.

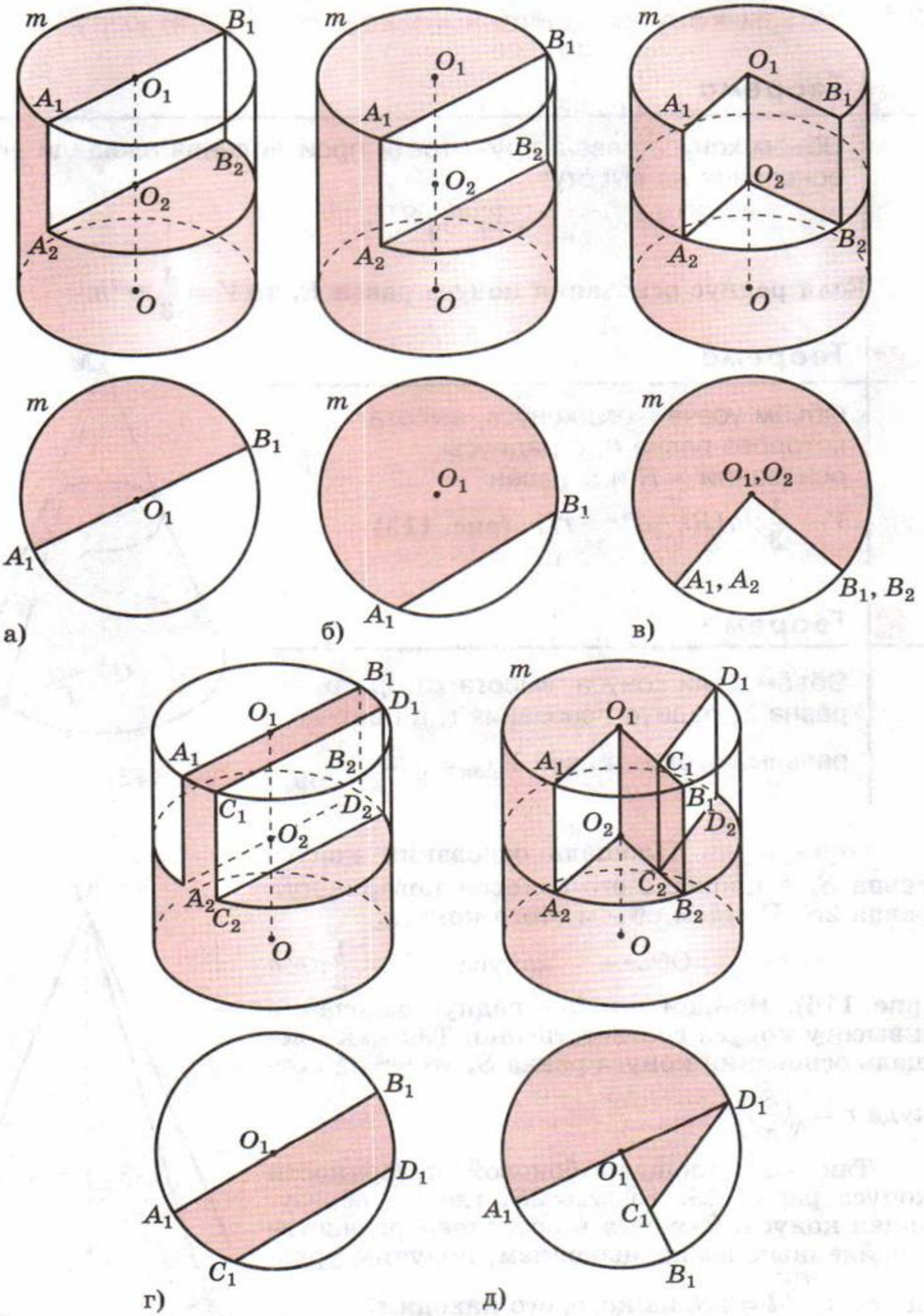


Рис. 114

27. Объём конуса, усечённого конуса и доли конуса

Теорема

Объём конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Если радиус основания конуса равен R, то $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Теорема

Объём усечённого конуса, высота которого равна h, а радиусы оснований — R и r, равен $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$ (рис. 115)

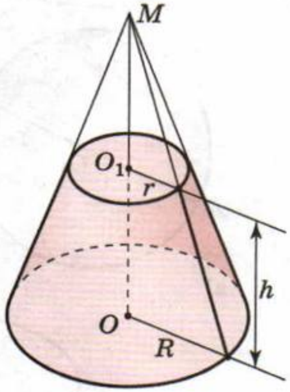


Рис. 115

Теорема

Объём доли конуса, высота которого равна h, радиус основания r, а центральный угол φ, равен $V_{\text{доли}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \frac{\varphi}{360}$.

Пример 68. Площадь основания конуса равна S, а площадь его боковой поверхности равна $2S$. Найдём объём этого конуса.

Решение. Объём конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (рис. 116). Найдём r и h — радиус основания и высоту конуса соответственно. Так как площадь основания конуса равна S, то $\pi r^2 = S$, откуда $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Так как площадь боковой поверхности конуса равна $2S$, то $\pi r l = 2S$, где l — образующая конуса. Заменяя в последнем равенстве r найденным выше значением, получим уравнение $\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}l = 2S$, из которого находим

$$l = \frac{2\sqrt{\pi S}}{\pi}.$$

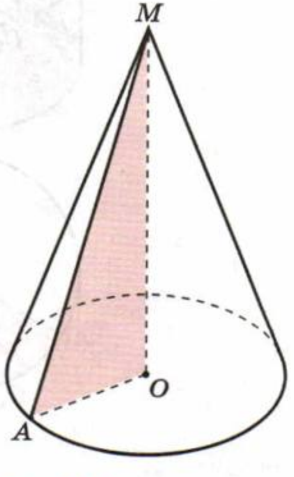


Рис. 116

Теперь по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника MOA находим

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}, \text{ или } h = \sqrt{\frac{4\pi S}{\pi^2} - \frac{S}{\pi}}.$$

Таким образом, $h = \sqrt{\dfrac{3S}{\pi}}$.

Итак, $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{S}{\pi}\sqrt{\dfrac{3S}{\pi}} = \dfrac{S}{3}\sqrt{\dfrac{3S}{\pi}}$.

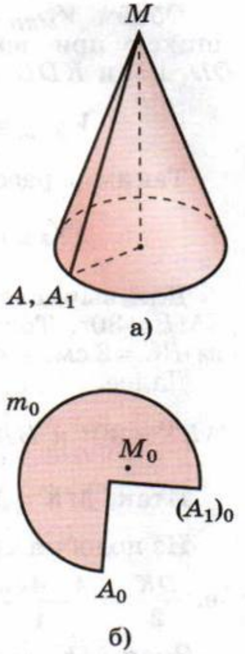


Рис. 117

Пример 69. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с центральным углом 270° и радиусом, равным 12 см. Найдём объём этого конуса.

Решение. Объём конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi AO^2 \cdot MO$ (рис. 117, *а*).

Найдём AO и MO — радиус основания и высоту конуса соответственно. Так как развёртка боковой поверхности конуса является круговым сектором с углом 270°, то она представляет собой $\dfrac{3}{4}$ площади круга (рис. 117, *б*). Радиус круга равен 12 см. Поэтому длина дуги $(AmA_1)_0$ развёртки $l = 2\pi \cdot (MA)_0 \cdot \dfrac{270}{360} = 18\pi$ (см).

Вместе с тем и длина дуги окружности основания конуса равна l. Значит,

$$2\pi AO = 18\pi, \text{ т. е. } AO = 9 \text{ (см)}.$$

Теперь из прямоугольного треугольника MOA находим

$$MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{7} \text{ (см)}.$$

Итак, $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 81 \cdot 3\sqrt{7} = 81\pi\sqrt{7}$ (см).

Пример 70. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ см и $BC = 2$ см вращается вокруг оси l, проходящей через его вершину B и образующей с прямой AB угол, равный 30°. Найдём объём полученного тела вращения.

Решение. Построим точки $M = CD \cap l$ и $K = AD \cap l$ (рис. 118). Обозначим объёмы тел, полученных при вращении вокруг оси l треугольников MKD, MBC и BKA, V_{MKD}, V_{MBC} и V_{BKA} соответственно.

Искомый объём V найдём как разность объёмов:

$$V = V_{MKD} - V_{MBC} - V_{BKA}.$$

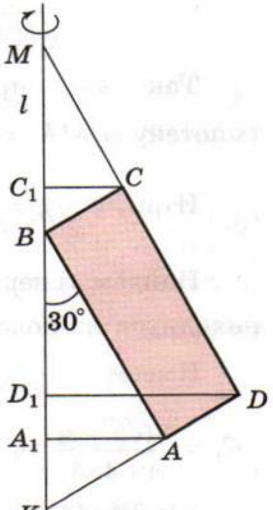


Рис. 118

Объём V_{MKD} представляет собой сумму объёмов тел, получающихся при вращении вокруг прямой l треугольников MDD_1 ($DD_1 \perp l$) и KDD_1. Получаем

$$V_{MDD_1} = \frac{1}{3}\pi \cdot DD_1^2 \cdot MD_1, \quad V_{KDD_1} = \frac{1}{3}\pi \cdot DD_1^2 \cdot KD_1.$$

Таким образом,

$$V_{MKD} = \frac{1}{3}\pi \cdot DD_1^2(MD_1 + KD_1) = \frac{1}{3}\pi DD_1^2 \cdot MK.$$

Для вычисления V_{MKD} найдём DD_1 и MK. Так как $CD \parallel AB$, то $\angle CMB = 30°$. Тогда из прямоугольного треугольника MCB, в котором $BC = 2$ см, находим $MB = 4$ см.

Далее, о прямоугольном треугольнике BAK известно, что $\angle ABK = 30°$ и $BA = 6$ см. Поэтому $BK = \dfrac{BA}{\cos 30°} = 6 : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см).

Итак, $MK = MB + BK = 4 + 4\sqrt{3}$ (см).

Из подобия треугольников MBC и MKD следует, что $\dfrac{DK}{BC} = \dfrac{MK}{MB}$, т. е. $\dfrac{DK}{2} = \dfrac{4 + 4\sqrt{3}}{4}$, откуда $DK = 2 + 3\sqrt{3}$ (см).

Зная MK и DK, по теореме Пифагора найдём MD:

$$MD = \sqrt{MK^2 - DK^2} = \sqrt{(4 + 4\sqrt{3})^2 - (2 + 2\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{(4 + 4\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3})(4 + 4\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{6(\sqrt{3} + 1)2(\sqrt{3} + 1)} =$$

$$= \sqrt{12(\sqrt{3} + 1)^2} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 2(3 + \sqrt{3}) \text{ (см)}.$$

Так как в прямоугольном треугольнике MDK $\angle DMK = 30°$ и гипотенуза $MK = 4 + 4\sqrt{3}$ см, то $DD_1 = \dfrac{1}{2}MK = 2 + 2\sqrt{3}$ см.

Итак, $V_{MKD} = \dfrac{1}{3}\pi(2 + 2\sqrt{3})^2 \cdot (4 + 4\sqrt{3}) = \dfrac{16\pi}{3}(10 + 6\sqrt{3})$ (см^3).

Найдём теперь $V_{MBC} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot CC_1^2 \cdot MB$, где $MB = 4$ см, а CC_1 легко находится из подобия треугольников MBC и MDK.

Имеем $\dfrac{CC_1}{DD_1} = \dfrac{MB}{MK}$, или $\dfrac{CC_1}{2(\sqrt{3} + 3)} = \dfrac{4}{4 + 4\sqrt{3}}$, откуда $CC_1 = \dfrac{8(\sqrt{3} + 3)}{4 + 4\sqrt{3}}$ см.

Таким образом,

$$V_{MBC} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8(\sqrt{3} + 3)}{4 + 4\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 4 = \frac{48\pi}{3} = 16\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Найдём еще V_{BKA}.

$V_{BKA} = \frac{1}{3}\pi AA_1^2 \cdot BK$, где $BK = 4\sqrt{3}$ см, а AA_1 находится из подобия треугольников BKA и MDK.

Имеем $\frac{AA_1}{DD_1} = \frac{AB}{MD}$, или $\frac{AA_1}{2+2\sqrt{3}} = \frac{6}{2(\sqrt{3}+3)}$, откуда $AA_1 = 2\sqrt{3}$ см.

Таким образом, $V_{BKA} = \frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3}$ (см³).

Итак, искомый объём

$$V = \frac{16\pi}{3}(10 + 6\sqrt{3}) - 16\pi - 16\pi\sqrt{3} = \frac{16\pi}{3}(7 - 3\sqrt{3})\ (\text{см}^3).$$

Пример 71. Точками A, B и C окружность основания конуса разделена на три равные части. На образующих MA и MB конуса взяты точки A_1 и B_1 соответственно — середины этих образующих. Найдём объём конуса, если радиус его основания равен r, а угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и A_1C равен 90°.

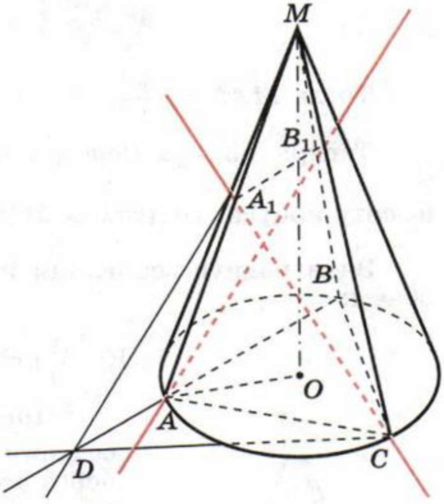


Рис. 119

Решение. Так как точками A, B и C окружность разделена на три равные части, то треугольник ABC является правильным, вписанным в окружность радиуса r (рис. 119). Тогда сторона этого треугольника равна $r\sqrt{3}$.

Выполним дополнительные построения. В плоскости MAB через точку A_1 проведём прямую, параллельную AB_1. Пусть проведённая прямая пересекает прямую AB в точке D. Так как $A_1D \parallel AB_1$, то угол между прямыми A_1D и A_1C равен углу между прямыми AB_1 и A_1C, т. е. равен 90°. Соединим точку D с точкой C. Получим прямоугольный треугольник A_1CD.

Найдём его сторону CD. В треугольнике BCD $BC = r\sqrt{3}$, $BD = BA + AD = BA + B_1A_1 = r\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}r\sqrt{3}$ и $\angle DBC = 60°$. Тогда по теореме косинусов $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cdot \cos 60°$, или

$$CD^2 = \left(\frac{3}{2}r\sqrt{3}\right)^2 + (r\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}r\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2},$$

откуда $CD = \frac{r\sqrt{21}}{2}$.

Перейдём теперь к прямоугольному треугольнику A_1CD. Ясно, что в нём $A_1C = A_1D$ (так как $A_1D = AB_1$ и $AB_1 = CA_1$ из равенства треугольников AB_1B и CA_1A). Тогда

$$A_1C = \frac{CD\sqrt{2}}{2} = \frac{r\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r\sqrt{42}}{4}.$$

Найдём теперь MA. По теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма имеем

$$(2CA)^2 + MA^2 = 2\,(AC^2 + MC^2),$$

или, так как $MC = MA$, $AC = r\sqrt{3}$ и $CA = \frac{r\sqrt{42}}{4}$, то

$$4\left(\frac{r\sqrt{42}}{4}\right)^2 + MA^2 = 6r^2 + 2MA^2.$$

Тогда $MA^2 = \frac{18r^2}{4}$.

Теперь из прямоугольного треугольника MOA можно найти высоту конуса. Получаем $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{18r^2}{4} - r^2} = \frac{r\sqrt{14}}{2}$.

Зная радиус основания конуса и его высоту, найдём искомый объём:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r\sqrt{14}}{2} = \frac{\pi r^3\sqrt{14}}{6}.$$

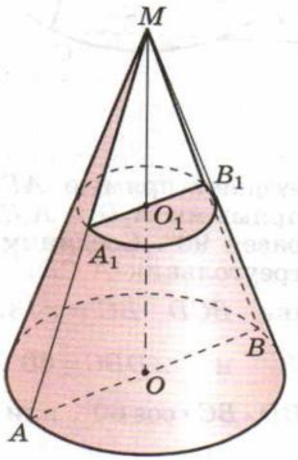


Рис. 120

Пример 72. Плоскостью MAB осевого сечения конуса и плоскостью, проходящей через точку O_1 — середину высоты MO конуса — параллельно плоскости его основания, от конуса отсечена часть, как показано на рисунке 120. Считая радиус основания конуса равным r, а его высоту равной h, найдём объём оставшегося тела.

Решение. Объём исходного конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, а объём удалённой из него части

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{\pi r^2 h}{48}.$$

Тогда объём оставшегося тела

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h}{48} = \frac{15\pi r^2 h}{48} = \frac{5\pi r^2 h}{16}.$$

Задания для самостоятельной работы

128 Из конуса удалена доля, угол которой равен φ. Развёртка на плоскость боковой поверхности оставшегося тела образует полукруг радиуса r. Найдите объём оставшегося тела, если:
а) $r=6$, $\varphi=90°$; б) $r=10$, $\varphi=60°$; в) $r=7$, $\varphi=45°$; г) $r=11$, $\varphi=30°$; д) $r=8$, $\varphi=120°$.

129 Сечением конуса плоскостью α, проходящей через его вершину M, является треугольник MAB, угол AMB которой равен φ, а сторона AB делит окружность основания конуса в отношении $1:2$.
Найдите объём конуса, если:
а) радиус основания конуса равен 10, а угол φ равен: 90°; 60°;
б) высота конуса равна 12, а угол φ равен: 90°; 60°;
в) образующая конуса равна 9, а угол φ равен: 90°; 60°.

130 Высота конуса 2 см, а угол в развёртке этого конуса на плоскость равен 270°. Найдите объём конуса.

131 Высота конуса 12 см, а его объём равен 324π см^3. Найдите угол сектора, который получается при разворачивании боковой поверхности конуса на плоскость.

132 Высота конуса равна h, а радиус его основания r. На окружности основания конуса взяты точки A и B. Плоскостью MAB от конуса отсечён конический сегмент, дуга AmB которого содержит угол $n°$.
Найдите объём оставшегося тела, если:
а) $n=60°$; б) $n=90°$; в) $n=120°$.

133 Высота конуса равна h, а радиус его основания равен r. На окружности основания конуса взяты такие точки A и B, что дуга AmB содержит 120°, а на хорде AB взята точка C — середина AB. Плоскостью MAB от конуса отсечён конический сегмент с дугой AmB, и затем из оставшегося конического сегмента удалена пирамида $MOBC$. Найдите объём тела, оставшегося после удаления из заданного конуса указанных сегмента и пирамиды, если угол BOC равен:
а) 60°; б) 30°; в) 90°.

28. Объём шара и его частей

Теорема

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Объём шарового сегмента

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

где $OA = R$ — радиус шара, $O_1A = r$ — радиус основания сегмента, $O_1P = h$ — высота сегмента (рис. 121).

Объём шарового слоя

$$V = \pi r^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2),$$

где $OA_1 = R$ — радиус шара, $O_1A_1 = r_1$ — радиус оснований шаровых сегментов, $O_1O_2 = h$ — высота шарового слоя. (На рисунке 122 точка O лежит между точками O_1 и O_2).

Объём шарового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $OA = R$ — радиус шара, $O_1P = h$ — высота шарового сегмента (рис. 123).

Объём шаровой доли с центральным углом φ

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\varphi}{360} = \frac{\pi R^3 \varphi}{270},$$

где $OA = OB = R$ — радиус шара, $\angle AOB = \varphi$ — центральный угол доли шара (рис. 124).

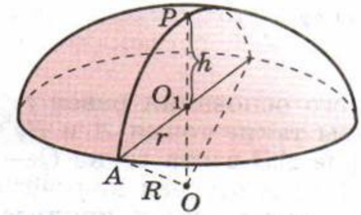


Рис. 121

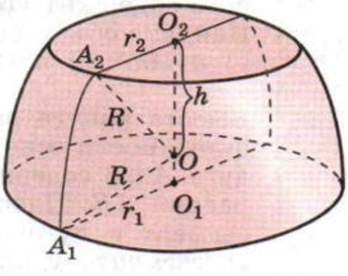


Рис. 122

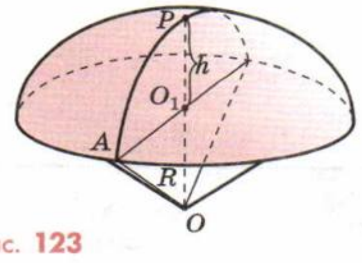


Рис. 123

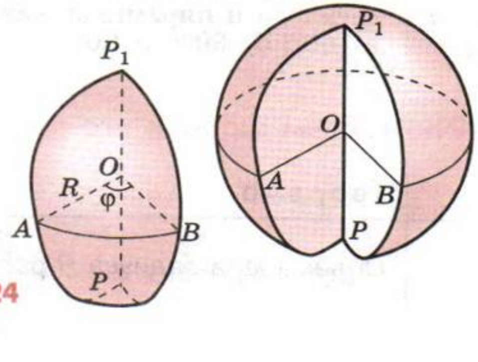


Рис. 124

Пример 73. Сфера Σ проходит через вершины грани $ABCD$ куба и касается рёбер грани, противолежащей $ABCD$. Считая ребро куба равным 1, найдём объём шара, ограниченного сферой Σ, и объёмы шаровых сегментов, отсечённых от куба плоскостями его граней.

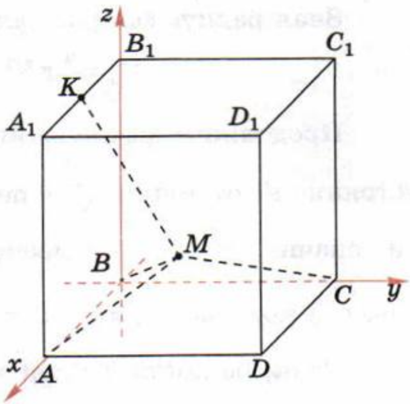


Рис. 125

Решение. Выясним сначала положение сферы относительно куба и радиус этой сферы. Воспользуемся для этой цели координатным методом. Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Bxyz$ с началом в точке B и координатными осями Bx, By и Bz, выбранными, как показано на рисунке 125. В качестве единицы измерения отрезков возьмём, например, отрезок, равный ребру куба.

В этой системе координат имеем $B\,(0;\,0;\,0)$, $A\,(1;\,0;\,0)$, $C\,(0;\,1;\,0)$ и $B_1\,(0;\,0;\,1)$.

Если некоторая точка M является центром сферы Σ, то одновременно выполняются равенства

$$MA = MB,\ MC = MB \text{ и } MK = MB, \qquad (1)$$

где K — точка касания сферы с прямой A_1B_1.

Ясно, что так как сфера проходит через точки A и B, то точка M принадлежит множеству точек, одинаково удалённых от двух данных точек. Как известно, этим множеством точек является плоскость, проходящая через середину отрезка AB, перпендикулярно к нему.

Следовательно, эта плоскость перпендикулярна и к отрезку A_1B_1 и проходит через его середину. Таким образом, точка K — середина отрезка A_1B_1. Значит, точка K имеет координаты $\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Переходя в равенствах (1) к координатам, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+(z-1)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{8}$. Таким образом, радиус сферы $R = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{41}}{8}$.

Зная радиус сферы, находим объём ограниченного ею шара Σ':

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{41\sqrt{41}}{512} = \frac{41\pi\sqrt{41}}{384}.$$

Продолжим вычисления. Так как радиус сферы $R = \frac{\sqrt{41}}{8}$, а расстояние d_1 от точки M — центра сферы до плоскости ABC равно $\frac{3}{8}$, и, значит, $R > d_1$, то плоскость ABC отсекает от шара Σ' сегмент, высота которого $h_1 = R - d_1 = \frac{\sqrt{41}}{8} - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{41}-3}{8}$.

Итак, объём этого шарового сегмента

$$V_1 = \pi h_1^2\left(R - \frac{h_1}{3}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{41}-3}{8}\right)^2\left(\frac{\sqrt{41}}{8} - \frac{\sqrt{41}-3}{24}\right) = \frac{\pi(41\sqrt{41}-171)}{768}.$$

Нетрудно заметить, что центр сферы Σ удалён от плоскостей других боковых граней куба также на расстояние, равное $\frac{1}{2}$. Значит, плоскости этих боковых граней отсекают от шара Σ' сегменты, каждый из которых имеет объём V_2.

И, наконец, так как центр сферы Σ удалён от плоскости верхнего основания куба на расстояние, равное $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$, и $\frac{\sqrt{41}}{8} > \frac{5}{8}$, то плоскость $A_1B_1C_1$ также пересекает сферу Σ и отсекает от шара Σ' сегмент, высота которого $h_2 = \frac{\sqrt{41}-5}{8}$.

Тогда объём отсечённого шарового сегмента

$$V_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{41}-5}{8}\right)^2\left(\frac{\sqrt{41}}{8} - \frac{\sqrt{41}-5}{24}\right) = \frac{\pi(41\sqrt{41}-245)}{768}.$$

С Задания для самостоятельной работы

134 Отношение высоты MO правильной пирамиды $MABCD$ к стороне её основания равно $\sqrt{3}:2$. Поверхность шара проходит через вершину M и касается сторон основания пирамиды в серединах этих сторон. Считая $AB = 1$, найдите:
а) расстояние от центра шара до граней пирамиды;
б) радиус шара;
в) объём шара;
г) объёмы шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостями граней пирамиды.

135 Поверхность шара проходит через вершины A, B и C призмы $ABCA_1B_1C_1$, все боковые грани которой являются квадратами, и касается плоскости верхнего основания призмы в его центре. Считая $AB=1$, найдите:
а) расстояние от центра шара до боковых граней и оснований призмы;
б) радиус шара;
в) объём шара;
г) объёмы шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостями боковых граней и плоскостью основания.

136 Поверхность шара проходит через вершину D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и середины его рёбер B_1B, B_1C_1 и B_1A_1. Считая ребро куба равным 1, найдите:
а) расстояние от центра шара до плоскостей BCC_1, ABB_1 и ABC;
б) радиус шара;
в) объём шара;
г) объёмы шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостями граней $ABCD$, AA_1D_1D и C_1CDA.

29. Площадь сферы и её частей

Теорема

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S=4\pi R^2.$$

Площадь шарового сегмента (см. рис. 121):

$$S_{\text{бок}}=2\pi Rh,$$
$$S_{\text{полн}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}=2\pi Rh+\pi r^2,$$

где $r=O_1A$ — радиус основания сегмента.

Площадь шарового слоя (см. рис. 122):

$$S_{\text{бок}}=2\pi Rh,$$
$$S_{\text{полн}}=2\pi Rh+\pi r_1^2+\pi r_2^2,$$

т. е. $S_{\text{полн}}$ равняется сумме боковой площади слоя и площадей двух его оснований.

Площадь шарового сектора (см. рис. 123):

$$S_{\text{бок}}=2\pi Rh,$$
$$S_{\text{полн}}=2\pi R(2h+\sqrt{2Rh-h^2}).$$

Площадь шаровой доли с центральным углом φ (см. рис. 124):

$$S_{\text{бок}}=\frac{\pi R^2\varphi}{90},\quad S_{\text{полн}}=\frac{\pi R^2\varphi}{90}+\pi R^2=\frac{\pi R^2(90+\varphi)}{90}.$$

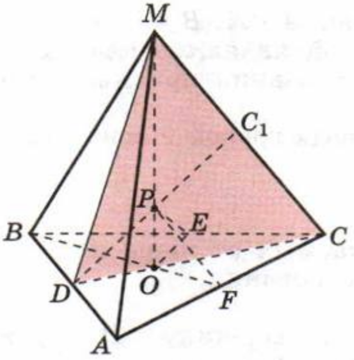


Рис. **126**

Пример 74. Площадь поверхности правильного тетраэдра равна S. Найдём площадь сферы, касающейся всех рёбер этого тетраэдра.

Решение. Пусть центром сферы является точка P, а точками её касания с рёбрами AB, BC и AC являются точки D, E и F соответственно (рис. 126). Опустим перпендикуляр PO из точки P на плоскость ABC и точку O соединим с точками D, E и F. Отрезки PD, PE и PF — это радиусы сферы, поэтому они равны, и, следовательно, $OD = OE = OF$. При этом так как $PD \perp AB_1$, то $OD \perp AB$, т. е. расстояние от точки O до стороны AB равно OD.

Аналогично расстояния от точки O до сторон BC и AC треугольника ABC — это отрезки OE и OF соответственно.

Таким образом, точка O одинаково удалена от сторон треугольника ABC, т. е. она является точкой пересечения его биссектрис. Принимая во внимание, что треугольник ABC правильный, т. е. его биссектрисы являются и медианами, приходим к выводу, что точки D, E и F — это середины сторон треугольника ABC, а точка O — центр треугольника ABC. Но тогда перпендикуляр PO к плоскости ABC лежит на высоте MO правильного тетраэдра $MABC$.

Аналогично заключим, что и других рёбер тетраэдра сфера касается в точках, являющихся серединами этих рёбер.

Итак, точка D — середина ребра AB. Пусть точка C_1 — середина ребра MC. Сфера касается в этих точках рёбер AB и MC соответственно. Рассмотрим сечение тетраэдра и сферы плоскостью MCD. В треугольнике MCD имеем $MD = CD$ (так как MD и CD — это медианы равных правильных треугольников MAB и ABC). Таким образом, медиана DC_1 является и высотой треугольника MCD. Тогда точка P — центр сферы, т. е. центр и окружности большого круга этой сферы, лежит на высоте MO.

Итак, $P = DC_1 \cap MO$. Поэтому отрезок DC_1 — это диаметр сферы. Вычислив расстояние DC_1, мы сможем найти радиус сферы, а затем и площадь её поверхности.

Перейдём к вычислениям. Найдём сначала ребро тетраэдра. Так как площадь поверхности тетраэдра равна S, то

$$4S_{ABC} = S, \text{ т. е. } S_{ABC} = \frac{S}{4}.$$

Положим для краткости ребро тетраэдра равным x. Тогда

$$CD = MD = \frac{x\sqrt{3}}{2} \text{ и } S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}, \text{ т. е. } \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{S}{4}, \text{ откуда } x^2 = \frac{S\sqrt{3}}{3}.$$

Далее, по теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма имеем

$$(2DC_1)^2 + MC^2 = 2\,(MD^2 + DC^2),$$

или

$$4DC_1^2 = 2\left(\frac{3x^2}{4} + \frac{3x^2}{4}\right) - \frac{S\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{т. е. } 4DC_1^2 = 3x^2 - \frac{S\sqrt{3}}{3}, \text{ откуда } DC_1^2 = \frac{S\sqrt{3}}{6}.$$

Итак, $DC_1 = \sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{6}}$, и, значит, радиус сферы равен $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{6}}$.

Тогда $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4}\frac{S\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi S\sqrt{3}}{6}$.

Пример 75. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и шар Σ расположены таким образом, что шар касается грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке O_1 — её центре и рёбер AB, BC, CD, AD в точках K, L, M и N соответственно — серединах этих рёбер. Считая ребро куба равным a, найдём площади шаровых сегментов, отсекаемых от куба плоскостями следующих граней: а) CDD_1C_1; б) $ABCD$.

Решение. а) Так как шар Σ касается грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке O_1 (рис. 127, a), то точка P — центр шара лежит на перпендикуляре к плоскости ABC, проведённом через точку O_1, т. е. на прямой O_1O, точка O которой является центром грани $ABCD$. При этом ясно, что отрезки PK, PL, PM и PN — это радиусы шара Σ. Значит, $PM = PO_1$.

Положим $PM = x$. В прямоугольном треугольнике POM, таким образом, $OM = \frac{a}{2}$, и так как $OO_1 = a$, $PO_1 = x$, то $PO = a - x$. По теореме Пифагора $OM^2 + OP^2 = PM^2$, или $\frac{a^2}{4} + (a - x)^2 = x^2$, откуда $x = \frac{5a}{8}$.

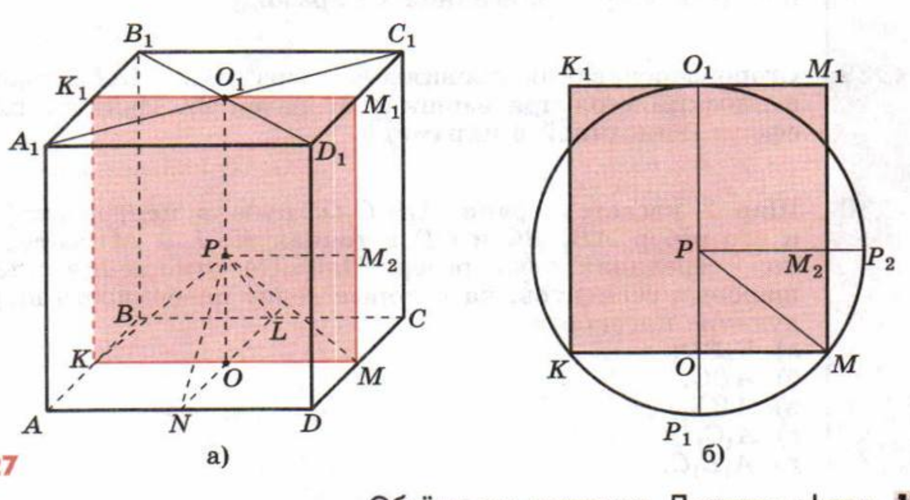


Рис. 127

Построим сечение шара Σ плоскостью O_1OM (рис. 127, *б*). Ясно, что радиус основания шарового сегмента, отсечённого от шара Σ гранью CDD_1C_1, равен $MM_2 = OP = a - x = \frac{3a}{8}$. А высота этого сегмента равна $PP_2 - PM_2 = \frac{5a}{8} - \frac{a}{2} = \frac{a}{8}$.

Таким образом, площадь этого сегмента

$$S_1 = 2\pi \cdot \frac{3a}{8} \cdot \frac{a}{8} = \frac{3\pi a^2}{32}.$$

б) Как нетрудно видеть из рисунка 127, *б*, радиус основания сегмента, отсекаемого от куба плоскостью грани $ABCD$, равен $\frac{a}{2}$, а его высота равна $PP_1 - PO = \frac{5a}{8} - \frac{3a}{8} = \frac{a}{4}$.

Таким образом, площадь этого сегмента

$$S_2 = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

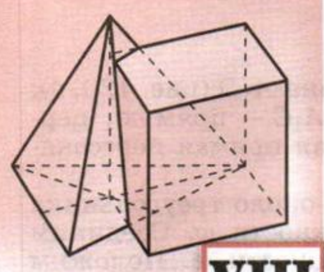
C Задания для самостоятельной работы

137 Боковое ребро правильной пирамиды $MABCD$ равно b и наклонено к плоскости её основания под углом 2φ. Найдите площадь сферы, описанной около пирамиды.

138 Сторона основания правильной пирамиды $MABC$ равна a, а двугранный угол при ребре основания равен 2φ. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду.

139 Сторона основания правильной пирамиды $MABCD$ равна a, а плоский угол при вершине M равен 2γ. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду.

140 Шар Σ касается грани $A_1B_1C_1D_1$ куба в центре этой грани и его рёбер AB, BC и CD в точках K, L и M соответственно — серединах этих рёбер. Найдите отношения площадей шаровых сегментов, на которые делят поверхность шара следующие плоскости:
а) B_1BD;
б) ABC;
в) ABB_1;
г) A_1C_1D;
д) A_1B_1C.



Глава VIII Комбинации многогранников и круглых тел

30. Комбинации многогранников с цилиндром, конусом и шаром

Пример 76. Правильный тетраэдр вписан в цилиндр таким образом, что одно из его рёбер является образующей цилиндра. Считая ребро тетраэдра равным a, найдём радиус основания цилиндра.

Решение. Пусть, например, ребро MA правильного тетраэдра $MABC$ является образующей цилиндра (рис. 128, a).

Так как вершины B и C одинаково удалены от точек M и A, то эти вершины принадлежат плоскости, перпендикулярной отрезку MA и проходящей через его середину. Обозначим эту плоскость γ.

Так как плоскость γ перпендикулярна образующей цилиндра, то она параллельна плоскости его основания и, следовательно, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания и параллельной ей. Обозначим полученную окружность ω.

Пусть $\omega \cap MA = A_1$. Соединим точку A_1 с точками B и C. Треугольник A_1BC является, таким образом, вписанным в окружность ω, радиус которой равен радиусу окружности основания. Найдём этот радиус.

Так как точка A_1 — середина отрезка MA, то отрезки BA_1 и CA_1 — медианы правильных треугольников MAE и MAC соответственно. Ясно, что отрезки BA_1 и CA_1 являются и высотами треугольников MAB и MAC. Это значит, что $BA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $CA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Известно также, что $BC = a$. Таким образом, известны все стороны треугольника A_1BC.

Центром окружности ω, описанной около этого треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

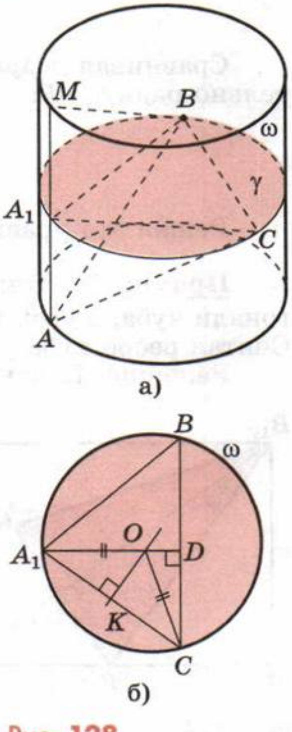


Рис. 128

Одним из этих перпендикуляров является медиана A_1D (рис. 128, *б*). Проведём через точку K — середину стороны A_1C — прямую, перпендикулярную этой стороне. Пусть проведённая прямая пересекает отрезок A_1D в точке O.

Точка O — центр окружности ω, описанной около треугольника A_1BC. Перейдём к вычислению радиуса окружности ω. Соединим точку O с точкой C, тогда OC — радиус окружности ω. Положим $OC = R$. Ясно, что и $A_1O = R$.

Выразим двумя способами расстояние A_1D.

1-й способ. Из прямоугольного треугольника OCD имеем

$$OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$A_1D = A_1O + OD = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}. \qquad (1)$$

2-й способ. Из прямоугольного треугольника A_1CD имеем

$$A_1D = \sqrt{A_1C^2 - CD^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}.$$

Таким образом,

$$A_1D = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем уравнение относительно радиуса R:

$$R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Решая это уравнение, находим $R = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Пример 77. В куб вписан конус, высота которого лежит на диагонали куба, а угол между образующей конуса и его высотой равен φ. Считая ребро куба равным a, найдём радиус основания конуса.

Решение. Пусть конус вписан в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и при этом высота B_1O конуса лежит на диагонали B_1D куба. Рассмотрим диагональное сечение куба — прямоугольник BB_1D_1D (рис. 129). Если конус касается плоскости ABC в точке P, то треугольник B_1PQ — осевое сечение конуса — является равнобедренным, и его угол PB_1Q равен 2φ.

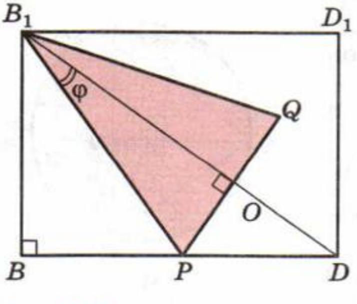


Рис. 129

Ясно, что в прямоугольном треугольнике B_1BD стороны равны соответственно $BB_1 = a$, $BD = a\sqrt{2}$ и $B_1D = a\sqrt{3}$. Пусть радиус основания конуса $OP = x$.

Из подобия прямоугольных треугольников DOP и DBB_1 следует, что $\frac{OP}{BB_1} = \frac{OD}{BD}$. Так как $OP = x$, $BB_1 = a$, $OD = B_1D - B_1O = a\sqrt{3} - \frac{x}{\operatorname{tg}\varphi}$ и $BD = a\sqrt{2}$, то получим уравнение

$$\frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{3} - \frac{x}{\operatorname{tg}\varphi}}{a\sqrt{2}}.$$

Решая это уравнение, находим $x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\varphi + \cos\varphi}$. Итак, искомый радиус основания конуса равен $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\varphi + \cos\varphi}$.

Пример 78. Сфера Σ помещена в прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением рёбер $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 1$ таким образом, что она касается граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ в точках пересечения диагоналей этих граней. В каждый из трёхгранных углов при вершинах этого параллелепипеда помещена сфера, касающаяся граней этого угла и сферы Σ. Считая $AB = a$, найдём радиусы сфер, помещённых в трёхгранные углы параллелепипеда.

Решение. Пусть $AC \cap BD = O$ и $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$. Центром сферы Σ является точка P — середина отрезка OO_1.

Пусть сфера Σ_B вписана в трёхгранный угол при вершине B и касается сферы Σ. Найдём радиус сферы Σ_B.

Зададим с этой целью прямоугольную систему координат в пространстве, как показано на рисунке 130, приняв в качестве единицы измерения отрезков ребро AB.

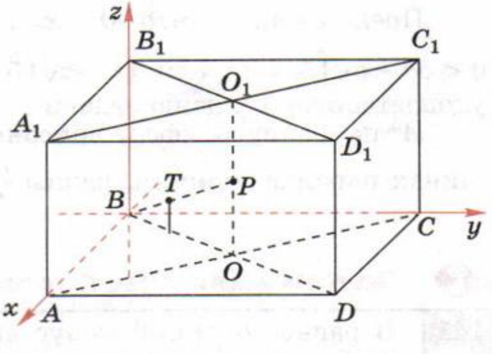


Рис. 130

В этой системе координат $B\,(0; 0; 0)$, $A\,(a; 0; 0)$, $C\,(0; 2a; 0)$ и $B_1\,(0; 0; a)$. Тогда $P\left(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2}\right)$.

Пусть центром сферы Σ_B является точка $T\,(x; y; z)$. Тогда так как эта сфера касается координатных плоскостей, то расстояния от точки T до этих плоскостей одинаковы, т. е. $x = y = z$.

Выразим двумя способами расстояние TP между центрами сфер Σ_B и Σ.

1-й способ. Так как $T\,(x; x; x)$, а $P\left(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2}\right)$, то

$$TP = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (x - a)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}.$$

2-й способ. Так как сфера Σ_B радиуса x касается сферы Σ радиуса $\frac{a}{2}$ внешним образом, то $TP = x + \frac{a}{2}$.

Таким образом, получаем уравнение

$$\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (x-a)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = x + \frac{a}{2},$$

из которого находим

$$x_1 = \frac{5a + a\sqrt{15}}{4},\ x_2 = \frac{5a - a\sqrt{15}}{4}.$$

По смыслу задачи $0 < x < \frac{a}{2}$. Действительно, если радиусы, например, сфер Σ_B и Σ_A больше $\frac{a}{2}$, то эти сферы не поместятся в параллелепипеде.

Предположим, что $0 < x_1 < \frac{a}{2}$, т. е. $0 < \frac{5a + a\sqrt{15}}{4} < \frac{a}{2}$. Тогда $0 < 5a + a\sqrt{15} < 2a$, или $-5a < a\sqrt{15} < -3a$, откуда ясно, что значение x_1 не является решением.

Предположим, что $0 < x_2 < \frac{a}{2}$, т. е. $0 < \frac{5a - a\sqrt{15}}{4} < \frac{a}{2}$. Тогда $0 < 5a - a\sqrt{15} < 2a$, или $0 < -a\sqrt{15} < -3a$. Таким образом, значение x_2 удовлетворяет условию задачи.

Итак, радиусы сфер, вписанных в трёхгранные углы при вершинах параллелепипеда, равны $\frac{a}{4}(5 - \sqrt{15})$.

C Задания для самостоятельной работы

141 В равносторонний конус вписан полушар так, что его большой круг находится в плоскости основания конуса. Найдите отношения, в которых окружность касания делит боковую поверхность полушара и боковую поверхность конуса.

142 Через середины боковых рёбер куба проходит сфера, касающаяся одного из оснований куба. Какая часть объёма куба лежит внутри сферы?

143 Ребро куба равно a. Найдите радиус двух равных шаров, которые можно поместить в куб так, чтобы они не могли передвигаться при перемещении куба.

144 Шар проходит через вершины одной из граней куба и касается рёбер противоположной грани. Найдите отношение ребра куба к радиусу шара.

145 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через точки A, B и C_1 проведена плоскость. Затем в пирамиду $C_1ABB_1A_1$ с вершиной C_1 вписан шар. Найдите угол между плоскостью ABC_1 и основанием призмы.

146 Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите радиус шара, касающегося боковых рёбер тетраэдра в вершинах его основания.

147 Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите радиус шара, касающегося боковых граней тетраэдра в точках, лежащих на сторонах его основания.

148 Ребро правильного тетраэдра равно a. Боковая поверхность цилиндра проходит через одно из его рёбер и через все вершины. Найдите радиус основания цилиндра.

149 Основания шарового слоя и цилиндра совпадают. Объём тела, заключённого между их боковыми поверхностями, равен 36π см^3. Найдите высоту цилиндра, если известно, что она равна высоте шарового слоя.

31. Комбинации многогранников

Пример 79. Квадрат $ABCD$ является общим основанием двух пирамид, расположенных по одну сторону от плоскости квадрата. Вершина M_1 первой пирамиды проектируется в точку B, а вершина M_2 второй пирамиды — в точку F — середину отрезка CD. Построим пересечение пирамид M_1ABCD и M_2ABCD и, считая $M_1B = M_2F = AB = a$, найдём:

а) длину линии пересечения боковых поверхностей заданных пирамид;

б) площадь полной поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных пирамид;

в) объём многогранника U_2, являющегося объединением заданных пирамид.

Решение. Построим пересечение пирамид M_1ABCD и M_2ABCD (рис. 131, a). Так как отрезки M_1B и M_2F перпендикулярны к одной плоскости, то $M_1B \parallel M_2F$. Из условия известно, что эти отрезки равны. Итак, $M_1B \parallel M_2F$ и $M_1B = M_2F$. Тогда M_1BFM_2 — параллелограмм. Построим точку P пересечения его диагоналей.

Точка P принадлежит отрезку M_2B и отрезку M_1F, который, в свою очередь, лежит в плоскости M_1CD. Таким образом, построенная точка P — это точка пересечения ребра M_2B с гранью M_1CD.

Так как, далее, $AB \parallel CD$, то прямая AB параллельна плоскости M_1CD. Тогда плоскость M_2AB, проходящая через прямую AB, пересекает плоскость M_1CD по прямой $m \parallel AB$. При этом так как плоскости M_2AB и M_1CD имеют общую точку P, то прямая m проходит через точку P.

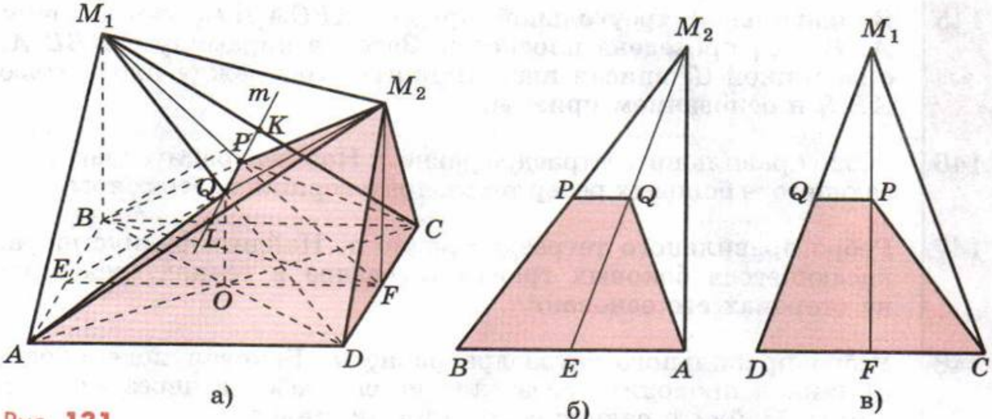


Рис. **131**

Итак, в плоскости M_2AB через точку P проведём прямую $m \parallel AB$. Ясно, что $m \parallel CD$.

Так как прямые m и M_1D лежат в одной плоскости M_1CD и они не параллельны, то эти прямые пересекаются. Пусть $m \cap M_1D = Q$.

Точка Q лежит на прямой m. Следовательно, точка Q лежит в плоскости M_2AB. Таким образом, построенная точка Q — это точка пересечения ребра M_1D первой пирамиды с гранью M_2AB второй пирамиды, а отрезок PQ — это пересечение граней M_1CD и M_2AB. Так как обе точки C и P лежат и в плоскости M_1CD, и в плоскости M_2BC, то эти плоскости пересекаются по прямой CP.

Таким образом, построен отрезок CP, являющийся пересечением граней M_1CD и M_2BC.

Аналогично получаем отрезок AQ, являющийся пересечением граней M_1AD и M_2AB.

Отрезок AD является пересечением боковых граней M_1AD и M_2AD. Аналогично отрезки AB, BC и CD также входят в состав линии пересечения боковых поверхностей заданных пирамид.

Итак, линия пересечения боковых поверхностей пирамид M_1ABCD и M_1ABCD построена. Она состоит из замкнутой плоской ломаной $ABCDA$ и незамкнутой пространственной ломаной $AQPC$.

Перейдём к вычислениям.

а) Найдём длину полученной линии пересечения. Длина ломаной $ABCDA$ равна $4a$. Определим длину ломаной $AQPC$.

Так как точка M_2 проектируется в точку F, то прямая FC — это проекция прямой M_2C на плоскость ABC. Но $FC \perp BC$. Тогда $M_2C \perp BC$. Как было выяснено при построении, точка P — середина отрезка M_2B. Таким образом, отрезок CP — это медиана прямоугольного треугольника M_2BC, проведённая из вершины прямого угла. Тогда

$$CP = \frac{1}{2}M_2B = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + M_2C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + (M_2F^2 + CF^2)} = \frac{3a}{2}.$$

Аналогично убеждаемся, что отрезок AQ — это медиана, проведённая из вершины прямого угла треугольника M_1AD, т. е. $AQ = \frac{1}{2}M_1D$. Так как в треугольнике M_1AD

$$M_1D = \sqrt{AD^2 + M_1A^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}, \text{ то } AQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Осталось найти длину отрезка PQ. Этот отрезок является средней линией треугольника M_1FD (так как точка P — середина отрезка M_1F и $PQ \parallel CD$). Тогда $PQ = \frac{1}{2}DF = \frac{a}{4}$.

Итак, длина линии пересечения боковых поверхностей заданных пирамид

$$l = 4a + \frac{3a}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{4} = \frac{a}{2}(10 + \sqrt{3}).$$

б) Подсчитаем $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных пирамид. Основанием многогранника U_1 служит квадрат $ABCD$.

Ясно, что $S_{\text{осн}} = a^2$. Боковая поверхность многогранника U_1 образована двумя треугольниками ADQ и BCP и двумя трапециями $ABPQ$ и $CDQP$, т. е.

$$S_{\text{бок}} = S_{ADQ} + S_{BCP} + S_{ABPQ} + S_{CDQP}.$$

Находим $S_{ADQ} = \frac{1}{2}S_{M_1AD} = \frac{1}{4}AD \cdot M_1A = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$, $S_{BCP} = \frac{1}{2}S_{M_2BC} = \frac{1}{4}BC \cdot M_2C$, где $M_2C = \sqrt{M_2F^2 + CF^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, т. е. $S_{BCP} = \frac{1}{4}a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$.

Далее ясно, что $S_{ABPQ} = \frac{AB + PQ}{2}QE$, где $AB = a$, $PQ = \frac{1}{2}BE = \frac{a}{4}$, $QE = \frac{1}{2}M_2E$ (рис. 131, *б*).

Длину отрезка M_2E можно найти из прямоугольного треугольника M_2FE. Получим $M_2E = \sqrt{M_2F^2 + FE^2} = a\sqrt{2}$. Тогда

$$S_{ABPQ} = \frac{a + \frac{a}{4}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}.$$

Аналогично находим площадь трапеции $CDQP$ (рис. 131, *в*).

$$S_{CDQP} = \frac{CD + PQ}{2} \cdot \frac{M_1C}{2} = \frac{a + \frac{a}{4}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}.$$

Итак,

$$S_{бок} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} + \frac{a^2\sqrt{5}}{8} + \frac{5a^2\sqrt{2}}{16} + \frac{5a^2\sqrt{2}}{16} = \frac{a^2}{8}(7\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

И, наконец, находим площадь полной поверхности многогранника U_1:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \frac{a^2(7\sqrt{2} + \sqrt{5})}{8} + a^2 = \frac{a^2}{8}(7\sqrt{2} + \sqrt{5} + 8).$$

в) Определим объём V многогранника U_2, являющегося объединением заданных пирамид. Будем искать его как сумму объёмов V_1 и V_2 этих пирамид без объёма V_3 многогранника U_1 (очевидно, что в сумму $V_1 + V_2$ объём V_3 входит дважды).

Итак, $V = V_1 + V_2 - V_3$. Имеем

$$V_1 = V_{M_1ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot M_1B = \frac{a^3}{3},$$

$$V_2 = V_{M_2ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot M_2F = \frac{a^3}{3}.$$

Объём V_3 найдём, например, как сумму объёмов пирамид $QABCD$ и $QBCP$:

$$V_3 = V_{QABCD} + V_{QBCP}.$$

Ясно, что $V_{QABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot h$, где $h = QO$ — это расстояние от точки Q до плоскости ABC. Из треугольника M_1BD нетрудно найти, что $h = \frac{1}{2}M_1B = \frac{a}{2}$.

Таким образом, $V_{QABCD} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$.

Чтобы определить V_{QBCP}, поступим следующим образом. Построим точку $K = PQ \cap M_1C$ (см. рис. 131, *а*). Так как по построению $PQ \parallel AB$, то прямая PQ перпендикулярна к плоскости M_1BC. Значит, отрезок QK — высота пирамиды $QBCK$, а отрезок PK — высота пирамиды $PBCK$.

Найдём объём V_{QBCP} как разность объёмов пирамид $QBCK$ и $PBCK$:

$$V_{QBCP} = V_{QBCK} - V_{PBCK} = \frac{1}{3}S_{BCK} \cdot QK - \frac{1}{3}S_{BCK} \cdot PK =$$

$$= \frac{1}{3}S_{BCK}(QK - PK) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{M_1BC}\right) \cdot QP = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{48}.$$

Тогда $V_3 = \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{48} = \frac{9a^3}{48}$.

Итак, объём V многогранника U_2 — объединения заданных пирамид — равен $\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}-\frac{9a^3}{48}=\frac{23a^3}{48}$.

Замечание. Пусть $m \cap M_2A = L$ (см. рис. 131, *а*). Тогда объём V можно определить как сумму объёмов трёх пирамид: M_1ABCD, M_1CPLD и $QALD$. Есть и другие способы вычисления объёма V.

С Задания для самостоятельной работы

150 В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC, а её боковая грань MBC также является правильным треугольником и перпендикулярна к плоскости ABC. Точки D, E и F — середины рёбер AB, BC и AC пирамиды соответственно — являются вершинами основания призмы $DEFD_1E_1F_1$, а её вершина E_1 совпадает с вершиной M пирамиды (рис. 132). Считая сторону основания призмы равной a, найдите:

а) длину линии пересечения боковой поверхности призмы с поверхностью пирамиды;

б) площадь поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных пирамиды и призмы;

в) объём многогранника U_2, являющегося объединением заданных пирамиды и призмы.

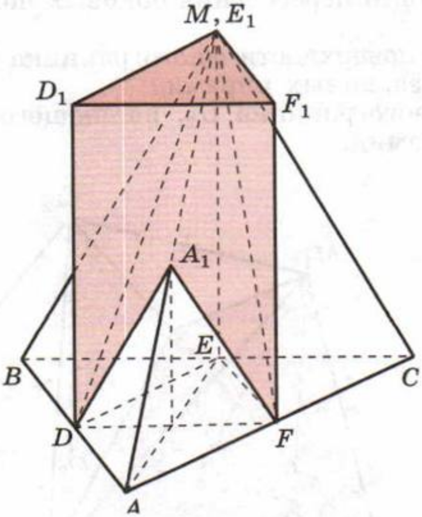


Рис. 132

151 Правильная пирамида M_1ABCD, боковое ребро которой равно диагонали её основания, и правильный тетраэдр M_2M_1CE расположены так, что ребро M_1C пирамиды является ребром и правильного тетраэдра, вершина E тетраэдра лежит в плоскости M_1AC, но не совпадает с точкой A, а вершина M_2 лежит по ту же сторону от плоскости M_1AC, что и точка D (рис. 133). Считая $AB = a$, найдите расстояние между следующими парами точек: а) A и E; б) O_1 и O_2; в) O_1 и E; г) D и E; д) M_2 и A; е) M_2 и B; ж) M_2 и D.

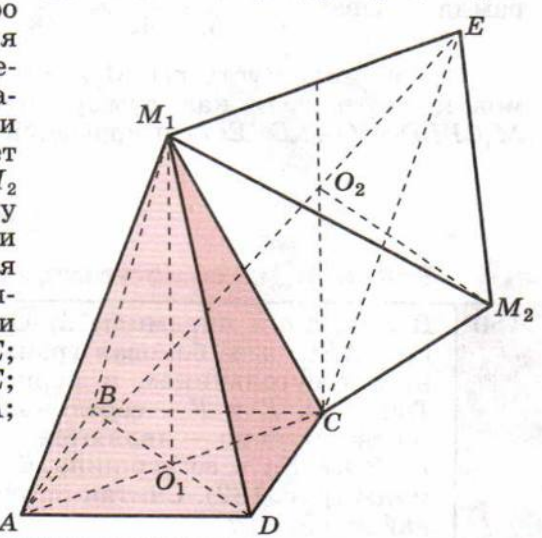


Рис. 133

152 Прямоугольник $ABCD$ с отношением сторон $AB : BC = 1 : 2$ является основанием двух пирамид, расположенных по одну сторону от плоскости ABC. Вершина M_1 первой из них проектируется в точку O_1 — середину отрезка AB, а вершина второй — в точку O_2 — середину отрезка BC (рис. 134). Считая $AB = M_1O_1 = M_2O_2 = a$, найдите:

а) длину линии пересечения боковых поверхностей заданных пирамид;

б) площадь поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных пирамид;

в) объём многогранника U_2, являющегося объединением заданных пирамид.

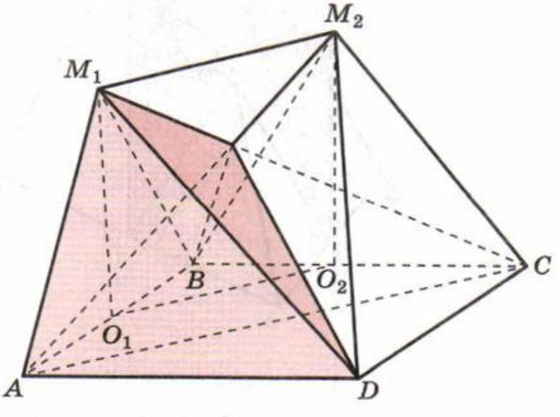


Рис. 134

153 Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и пирамида $MEFK$ расположены по одну сторону от плоскости ABC. При этом точка F является серединой отрезка BC, точка E симметрична точке O ($O = AC \cap BD$) относительно точки A, а точка K симметрична точке O относительно прямой CD. Боковое ребро MF пирамиды перпендикулярно к плоскости её основания и в два раза больше ребра куба (рис. 135). Считая $AB = a$, найдите:

а) длину линии пересечения граней MFK, MEF и MEK с поверхностью куба;

б) площадь той части поверхности куба, которая находится вне пирамиды;

в) объём многогранника U, являющегося пересечением заданных пирамиды и куба.

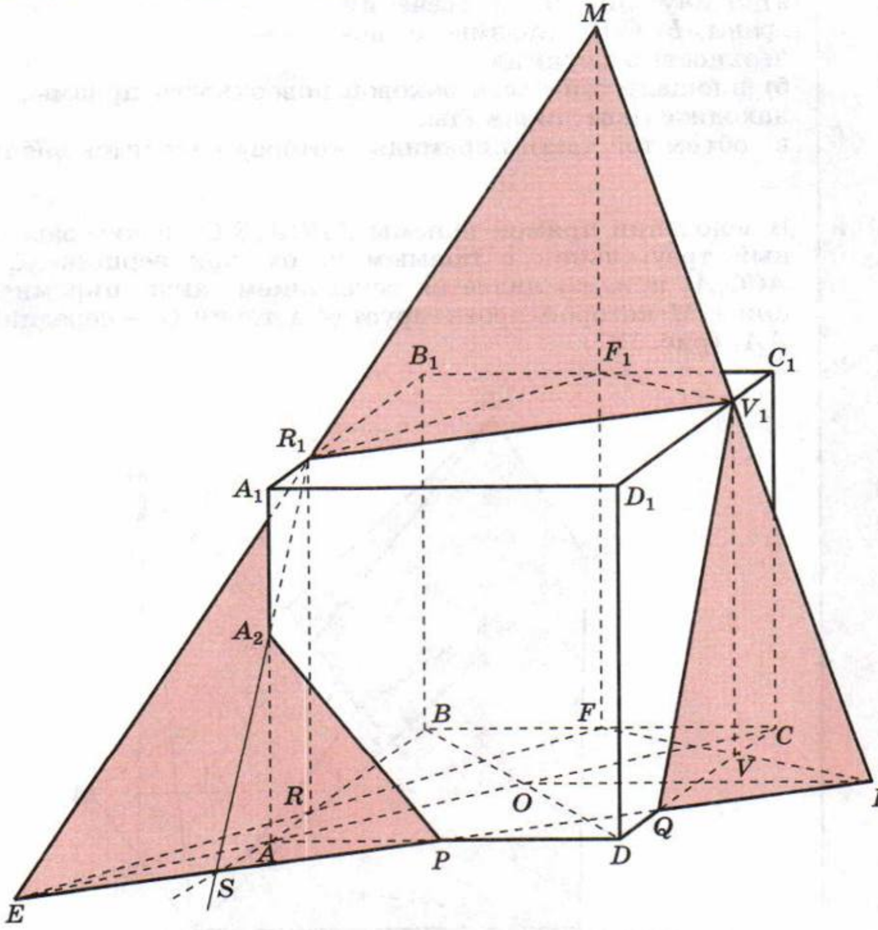


Рис. 135

154 На ребре AC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка D — середина этого ребра. Четырёхугольник A_1C_1CD является основанием пирамиды MA_1C_1CD, боковое ребро MC которой перпендикулярно к плоскости её основания и равно медиане основания призмы. Заданные призма и пирамида находятся по одну сторону от плоскости ACC_1 (рис. 136). Считая $AB = AA_1 = a$, найдите:

а) длину линии пересечения грани BCC_1B_1 призмы с поверхностью пирамиды;

б) площадь той части боковой поверхности призмы, которая находится вне пирамиды;

в) объём той части пирамиды, которая находится вне призмы.

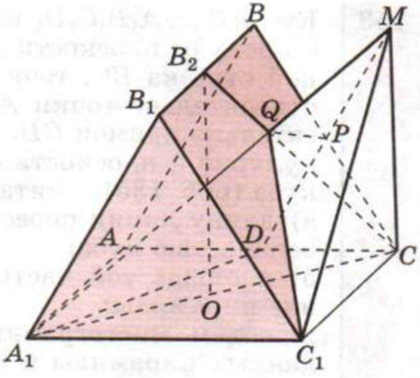


Рис. **136**

155 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C. Грань ACC_1A_1 призмы является основанием также пирамиды, вершина M которой проектируется в точку O — середину ребра AA_1 (рис. 137).

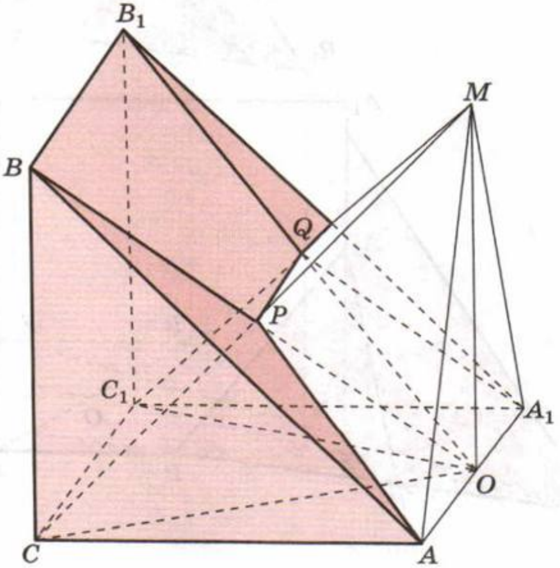


Рис. **137**

Считая $AC = BC = AA_1 = a$, найдите:
а) длину линии пересечения плоскости ABB_1 с поверхностью пирамиды $MACC_1A_1$;
б) площадь поверхности многогранника U_1, являющегося объединением заданных призмы и пирамиды;
в) объём многогранника U_2, являющегося объединением заданных призмы и пирамиды.

156 Правильный тетраэдр $MABC$ и куб $OCDEO_1C_1D_1E_1$ расположены таким образом, что точка O — основание высоты тетраэдра — является вершиной куба, а из трёх его рёбер, принадлежащих этой вершине, одно совпадает с отрезком OC, второе лежит на высоте MO, а третье пересекает отрезок AC (рис. 138).

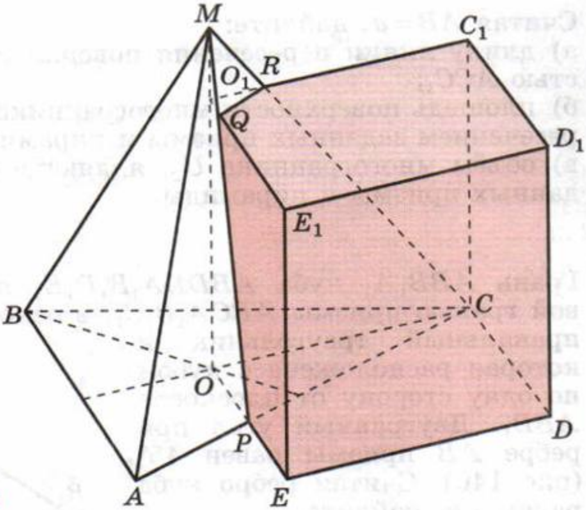


Рис. 138

Считая ребро тетраэдра равным $a\sqrt{3}$, найдите:
а) длину линии пересечения поверхности куба плоскостью MAC;
б) площадь поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных тетраэдра и куба;
в) объём той части куба, которая находится вне заданного тетраэдра.

157 Правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, боковое ребро которой в два раза больше стороны основания, и пирамида $MABB_1A_1$ расположены по одну сторону от плоскости A_1AB. Грань ABB_1A_1 призмы является также основанием пирамиды, а боковое ребро MA_1 пирамиды перпендикулярно к плоскости A_1AB и равно медиане треугольника ABC (рис. 139).

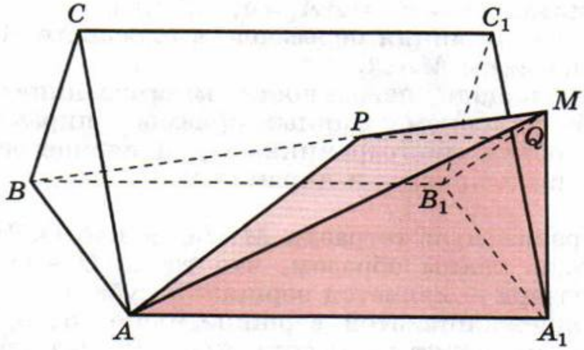


Рис. 139

Считая $AB = a$, найдите:

а) длину линии пересечения поверхности пирамиды плоскостью ACC_1;

б) площадь поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных призмы и пирамиды;

в) объём многогранника U_2, являющегося объединением заданных призмы и пирамиды.

158 Грань ABB_1A_1 куба $ABDEA_1B_1D_1E_1$ является также боковой гранью призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит правильный треугольник и которая расположена с кубом по одну сторону от плоскости ABB_1. Двугранный угол при ребре AB призмы равен 45° (рис. 140). Считая ребро куба равным a, найдите:

а) длину линии пересечения заданных призмы и куба;

б) площадь той части поверхности призмы, которая находится вне куба;

в) объём той части призмы, которая находится вне куба;

г) объём той части куба, которая находится вне призмы.

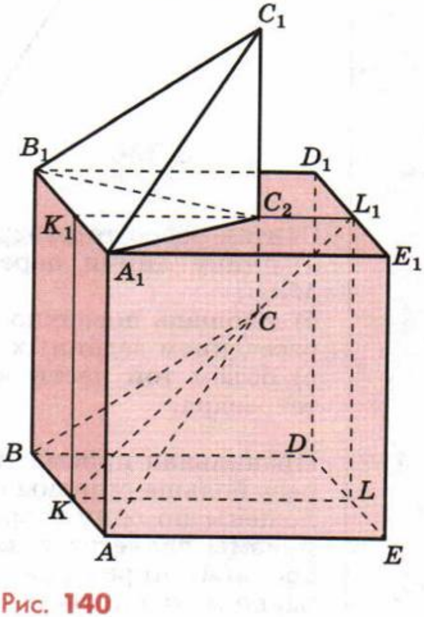


Рис. 140

159 Два равных куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ расположены так, что диагональ B_1D_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ первого куба является также диагональю грани $A_1'B_1'C_1'D_1'$ второго куба. Угол между плоскостями этих граней равен 90° (рис. 141). Считая ребро куба равным a, найдите:

а) длину линии пересечения поверхностей заданных кубов;

б) площадь поверхности многогранника U_1, являющегося пересечением заданных кубов;

в) объём многогранника U_2, являющегося объединением заданных кубов.

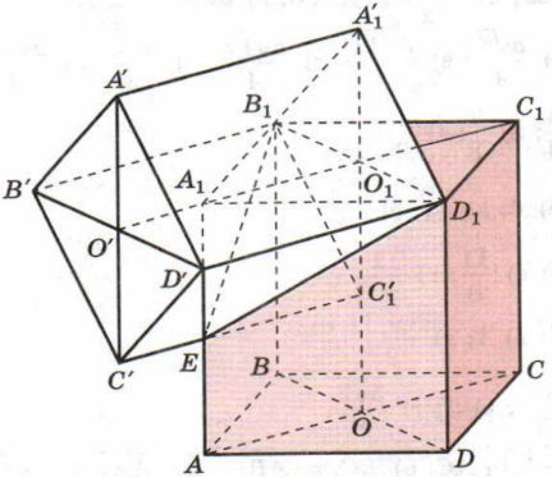


Рис. 141

Ответы

2. а) $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RV}$; б) $\overrightarrow{A_2P}$, $\overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{AB_1}$; в) $\overrightarrow{AR}$ и $\overrightarrow{QC_1}$.

3. а) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{B_1A_1}$.

7. а) $a\sqrt{3}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{3a}{2}$; г) $\frac{3a}{2}$; д) $a\sqrt{2}$; е) $\frac{3a}{2}$.

8. а) $2a$; б) $2a$; в) $\frac{a\sqrt{22}}{2}$; г) $a\sqrt{6}$; д) $a\sqrt{6}$; е) $2a\sqrt{2}$.

9. а) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{11}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{17}}{4}$; д) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

20. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{1}{2}$.

21. а) $\frac{\sqrt{10}}{20}$; б) 0; в) -1; г) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

22. а) 1; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{11}{8}$; г) $\frac{11}{8}$.

23. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$.

24. а) 0; б) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; в) 1; г) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

26. а) $\overrightarrow{B_1C_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BC_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$; в) $\overrightarrow{B_1C}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}$;
г) $\overrightarrow{AE_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$; д) $\overrightarrow{C_1E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}$;
е) $\overrightarrow{B_2E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AA_1}$.

27. а) $\overrightarrow{B_1E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1B}$; б) $\overrightarrow{C_2E}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}$;
в) $\overrightarrow{A_1E}=-\overrightarrow{B_1A_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{AC_2}=-\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}$;
д) $\overrightarrow{A_1C_2}=-\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B}$; е) $\overrightarrow{OC_2}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

28. а) $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$; б) $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; в) $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$;
г) $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\vec{c}$; д) $\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$; е) $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{5}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

30. а) Треугольник общего вида; б) треугольник общего вида; в) равнобедренный треугольник; г) треугольник общего вида; д) равнобедренный треугольник, тупоугольный треугольник; е) прямоугольный треугольник; ж) неплоский четырёхугольник; з) параллелограмм; и) прямоугольник; к) ромб.

31. а) Равнобедренный треугольник; б) треугольник общего вида; в) треугольник общего вида; г) равнобедренный треугольник; д) равнобедренный треугольник; е) тупоугольный треугольник; ж) параллелограмм; з) равнобедренная трапеция; и) равнобедренная трапеция.

32. а) $\overrightarrow{MC}\,(0; \sqrt{3}; -1)$, $\overrightarrow{A_1C}\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)$;

б) $\overrightarrow{BC_1}\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC_1}\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

в) $\overrightarrow{MP}\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right)$, $\overrightarrow{C_1P}\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{1}{2}\right)$.

33. а) $\overrightarrow{OC_1}\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\overrightarrow{OB_1}\left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$;

б) $\overrightarrow{DC_1}\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC_1}\left(-\frac{3}{4}; \frac{9}{4}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$;

в) $\overrightarrow{MP}\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; -\sqrt{10}\right)$, $\overrightarrow{B_1P}\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

34. а) $\overrightarrow{DC_1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{B_1C_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{C_2P}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}; -\frac{1}{2}\right)$;

б) $\vec{s_1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, $\vec{r_1}\left(-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, $\vec{v_1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -2\sqrt{2}; -1\right)$;

в) $\vec{s_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{13\sqrt{2}}{4}; -\frac{5}{2}\right)$, $\vec{r_2}\left(-\frac{5\sqrt{2}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{5}{3}\right)$, $\vec{v_2}\,(0; 0; 1)$.

43. а) 3; б) 3; в) 3,5; г) 7,5.

44. а) $\frac{\sqrt{34}}{34}$; б) $-\frac{\sqrt{42}}{14}$; в) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$; г) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$.

45. а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$; е) $\arccos\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

46. а) $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$; б) $\arccos\frac{5\sqrt{6}}{18}$; в) $\arccos\frac{9\sqrt{85}}{85}$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

47. а) $60°$; б) $\arccos\frac{3}{4}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{20}$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$; е) $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

48. а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{12}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$;
г) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{6}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{78}}{39}$.

49. а) $\arccos\frac{\sqrt{13}}{39}$; б) $\arccos\frac{4\sqrt{65}}{65}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{13}}{39}$;
г) $\arccos\frac{4\sqrt{65}}{65}$; д) $\arccos\frac{4\sqrt{65}}{65}$; е) $\arccos\frac{2\sqrt{13}}{39}$.

50. а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$; в) $90°$;
г) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$; д) $\arccos\frac{1}{3}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

51. а) $90°$; б) $\arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$;
г) $\arccos\frac{\sqrt{7}}{21}$; д) $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{70}}{10}$.

52. 1) а) $(1; 0; -1)$; б) $(2; 1; -2)$; в) $(1; 2; -2)$ (рис. 43, *а*);
2) а) $(1; 0; 1)$; б) $(2; -1; 2)$; в) $(1; -2; 2)$ (рис. 43, *б*);
3) а) $(0; 1; -1)$; б) $(1; -2; 2)$; в) $(2; -1; 2)$ (рис. 43, *в*).

53. 1) а) $(3; -\sqrt{3}; 2)$; б) $(3; -3\sqrt{3}; 2)$; в) $(9; -5\sqrt{3}; 4)$ (рис. 44, *а*);
2) а) $(3; \sqrt{3}; 2)$; б) $(3; 0; 1)$; в) $(6; \sqrt{3}; 2)$ (рис. 44, *б*);
3) а) $(\sqrt{3}; 0; 1)$; б) $(3\sqrt{3}; -3; 2)$; в) $(7\sqrt{3}; -3; 2)$ (рис. 44, *в*).

54. а) $\arccos\frac{4\sqrt{61}}{61}$; б) $\arccos\frac{6\sqrt{61}}{61}$; в) $\arccos\frac{3\sqrt{61}}{61}$;
г) $\arccos\frac{2\sqrt{13}}{61}$; д) $\arccos\frac{43}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{34}}$; е) $\arccos\frac{35}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{22}}$.

55. а) $90°$; б) $\arccos\frac{4\sqrt{41}}{41}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{41}}{41}$;
г) $\arccos\frac{7\sqrt{246}}{123}$; д) $\arccos\frac{9\sqrt{457}}{457}$; е) $\arccos\frac{13\sqrt{205}}{205}$.

56. а) $90°$; б) $90°$; в) $30°$; г) $\arccos\frac{\sqrt{39}}{26}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$; е) $\arccos\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

57. а) $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{9}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$; г) $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$;
д) $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{9}$; е) $\arccos\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

58. а) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$;
д) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$; е) $\arccos\frac{7\sqrt{6}}{18}$.

59. а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{26}}{13}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{58}}{29}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{42}}{21}$;
д) $\arccos\frac{\sqrt{42}}{7}$; е) $\arccos\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

60. 1) а) $2x-1=0$; б) $x-\sqrt{3}y+1=0$; в) $x+\sqrt{3}y+2z-2=0$ (рис. 51, *а*);
2) а) $\sqrt{3}x+y-2=0$; б) $\sqrt{3}x-y-1=0$; в) $2y+2z-1=0$ (рис. 51, *б*);
3) а) $x+\sqrt{3}y-3=0$; б) $x=0$; в) $x-\sqrt{3}y-2z+3=0$ (рис. 51, *в*).

61. 1) а) $3y+3z-2=0$; б) $4x+2y+3z-3=0$; в) $x+2y-1=0$ (рис. 52, *а*).
2) а) $3x-\sqrt{3}y+2\sqrt{6}z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$; б) $2x-3\sqrt{6}z=0$;
в) $x+\sqrt{3}y+\sqrt{6}z-1=0$ (рис. 52, *б*);
3) а) $\sqrt{3}x+y+2\sqrt{2}z=0$; б) $x+\sqrt{3}y-3\sqrt{6}z=0$; в) $x-\sqrt{3}y-\sqrt{6}z=0$ (рис. 52, *в*).

62. 1) а) $2x+z-1=0$; б) $x+z-1=0$; в) $2x-y+3=0$ (рис. 53, *а*);
2) а) $2x-z-1=0$; б) $x-z=0$; в) $2x+y-3z=0$ (рис. 53, *б*);
3) а) $2x-6y+\sqrt{2}=0$; б) $y=0$; в) $\sqrt{2}x+5\sqrt{2}y-2z+1=0$ (рис. 53, *в*).

67. а) $\frac{a^2}{8}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{a^2\sqrt{5}}{5}$; г) $\frac{a^2\sqrt{5}}{16}$; д) $\frac{3a^2}{8}$; е) $\frac{3a^2}{8}$.

68. а) $\frac{2a^2\sqrt{7}}{3}$; б) $\frac{a^2\sqrt{13}}{3}$; в) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; г) $\frac{a^2\sqrt{19}}{4}$; д) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$; е) $\frac{a^2\sqrt{51}}{8}$;
ж) $\frac{3a^2\sqrt{67}}{4}$; з) $\frac{5a^2\sqrt{31}}{24}$.

69. а) $\frac{a^2\sqrt{13}}{3}$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{7a^2}{18}$; г) $\frac{9a^2}{8}$; д) $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$; е) $\frac{7a^2\sqrt{11}}{24}$;
ж) $\frac{a^2\sqrt{14}}{3}$; з) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

70. а) $\frac{3a^2}{4}$; б) $\frac{9a^2}{8}$; в) $\frac{a^2\sqrt{33}}{8}$; г) $\frac{3a^2}{16}$; д) $\frac{a^2\sqrt{14}}{4}$; е) $\frac{a^2\sqrt{281}}{16}$;
ж) $\frac{a^2\sqrt{57}}{16}$; з) $\frac{a^2\sqrt{89}}{16}$.

71. а) $\frac{a^2\sqrt{21}}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{21}}{2}$; в) $\frac{3a^2\sqrt{33}}{8}$; г) $\frac{3a^2\sqrt{6}}{4}$; д) $\frac{7a^2\sqrt{14}}{12}$; е) $\frac{9a^2}{4}$.

72. а) $\frac{a^2}{4}(7+2\sqrt{3})$; б) $\frac{3a^2}{4}(3+\sqrt{3})$; в) $\frac{a^2}{4}(7+3\sqrt{3})$.

73. $\frac{a^2}{4}(18+\sqrt{6})$.

74. $\frac{a^2}{16}(40+7\sqrt{3}+\sqrt{7})$.

75. $\frac{a^2}{32}(25\sqrt{3}+8\sqrt{11}+24)$.

76. $\frac{a^2}{8}(7\sqrt{15}+5\sqrt{17}+4\sqrt{3}+14)$.

77. а) $d^2\sqrt{2}$; б) $\frac{d^2}{2}(1+\sqrt{3})$; в) $\frac{d^2}{4}(3+\sqrt{3})$; г) $\frac{d^2}{4}(3+\sqrt{3})$; д) $d^2\sqrt{6}$;

е) $\frac{d^2}{4}(3+\sqrt{3})$.

78. а) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$; б) $2a^2\sqrt{2}$; в) $2a^2\sqrt{2}$; г) $2a^2\sqrt{2}$; д) $\frac{4a^2\sqrt{23}}{23}$; е) $\frac{2a^2\sqrt{30}}{3}$.

79. а) $\frac{d^2}{2}(1+\sqrt{2})$; б) $\frac{d^2}{2}(1+\sqrt{2})$; в) $\frac{d^2}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$; г) $d^2(\sqrt{3}+\sqrt{6})$;

д) $\frac{d^2}{4}(1+2\sqrt{2})$; е) $\frac{d^2}{2}(1+\sqrt{2})$.

80. а) $2a^2\sqrt{3}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}\,(2\sqrt{11}+\sqrt{17})}{3}$; в) $\frac{2a^2\sqrt{21}}{3}$.

81. а) $2a^2\sqrt{3}$; б) $2a^2$; в) $2a^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

82. а) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a^2(5\sqrt{3}+9)}{4}$; в) $\frac{a^2\sqrt{3}(2m+1)}{4(m-1)}$.

83. а) $\frac{3a\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$; б) $2a\sqrt{4b^2-a^2}$; в) $2a(\sqrt{4b^2-a^2}+\sqrt{b^2-a^2})$.

84. а) $3a^2\sqrt{2}$; б) $\frac{3a^2}{2}\sqrt{8+6\sqrt{2}}$; в) $\frac{3a^2\sqrt{\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)}}{\sin\alpha}$.

85. а) $a^2(1+\sqrt{3})$; б) $\frac{4a^2(3+\sqrt{3})}{3}$; в) $4a^2\left(\frac{\cos\alpha}{4\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+1\right)$.

86. а) $\frac{a^2}{2}(5+3\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$; б) $a^2(2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$;

в) $\frac{a^2}{2}(3+4\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\sqrt{10})$; г) $\frac{a^2}{2}(3+10\sqrt{2}+\sqrt{5})$;

д) $a^2(1+2\sqrt{2}+2\sqrt{5})$; е) $\frac{a^2}{2}(3+3\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{10})$.

87. а) $\frac{h^2}{2}(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})$; б) $\frac{h^2}{2}(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$; в) $\frac{h^2}{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6})$;

г) $\frac{h^2}{2}(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

88. а) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$; б) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$; в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3a^2\sqrt{15}}{20}$;

д) $\frac{3a^2}{8\sqrt{\sin(\alpha-30°)\sin(\alpha+30°)}}$.

89. а) $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})$; б) $\frac{a^2}{2}(5\sqrt{2}+\sqrt{3})$; в) $\frac{a^2}{2}(6+5\sqrt{5}+2\sqrt{3})$;

г) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{5}+10)$.

90. а) $\varphi_1=60°$; б) $\varphi_2=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\varphi_3=\arccos\frac{1}{3}$; г) $\varphi_4=\arccos\frac{1}{3}$.

91. а) $13a^2$; б) $9a^2$; в) $\arcsin\frac{\sqrt{65}}{9}$, $\arcsin\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\arcsin\frac{\sqrt{17}}{9}$.

92. а) $60°$; б) $\frac{2}{3}h$; в) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; г) $\frac{4h^2\sqrt{3}}{3}$; д) $2h^2\sqrt{3}$; е) $\frac{2}{3}h^2$ и $\frac{1}{9}h^2\sqrt{30}$;

ж) $\arccos\left(-\frac{5}{8}\right)$.

93. а) $\frac{a^2(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$; б) $\frac{a^2(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$; в) $\frac{a^2}{4}(4\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{8\operatorname{tg}^2\alpha+2})$;

г) $\frac{a^2}{2\cos\alpha}(2+\sqrt{1+\sin^2\alpha})$; д) $\frac{a^2(1+\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha)}{2\cos\alpha}$.

94. а) $\frac{a}{4}\sqrt{36l^2-15a^2}$; б) $\frac{a}{4}\sqrt{36h^2+3a^2}$; в) $\frac{3a}{2}\sqrt{c^2-2a^2}$; г) $\frac{9a}{2}\sqrt{d^2-2a^2}$;

д) $\frac{a}{4}\sqrt{16Q+3a^2}$.

95. а) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{\sqrt{191}}{2}$ см; г) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ см; д) $\frac{\sqrt{259}}{4}$ см.

96. а) $2(2\sqrt{7}-\sqrt{3})$ см и $4(2\sqrt{7}-\sqrt{3})$ см; б) 12 см и 24 см;

в) $\frac{8\sqrt{7}}{3}$ см и $\frac{16\sqrt{7}}{3}$ см.

97. а) $2a\sqrt{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{70}}{5}$; г) $\frac{a\sqrt{30}}{5}$; д) $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$; е) $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$; ж) $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$.

98. а) $S\sqrt{2}$; б) S; в) $S\sqrt{3}$; г) $2S\sin\varphi$.

99. 1) а) $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{6+\sqrt{2}}}$; б) $\arccos\dfrac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{6+\sqrt{2}}}$; в) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{4\sqrt{6+\sqrt{2}}}$;

г) $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6+\sqrt{2}}}$; д) $\arccos\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{30+5\sqrt{2}}}$; е) $\arccos\dfrac{6-\sqrt{2}}{2\sqrt{30+5\sqrt{2}}}$;

ж) $\arccos\dfrac{10+\sqrt{2}}{2\sqrt{30+5\sqrt{2}}}$;

2) а) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6+\sqrt{2}}}$; б) $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6+\sqrt{2}}}$;

г) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; д) $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; е) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

3) а) $\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $\arccos\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; в) $\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; г) $\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;
д) $30°$.

100. а) 4 см^2; б) $4\sqrt{3}$ см^2; в) $4\sqrt{2(2-\pi)}$ см^2.

101. а) $\dfrac{ah}{\sin\varphi}$; б) $\dfrac{\pi ah}{\sin\varphi}$; в) $\dfrac{\pi a(a+2h\sin\varphi)}{2\sin^2\varphi}$.

102. а) $\dfrac{1}{2}d^2$; б) $\dfrac{2}{5}d^2$; в) $\dfrac{mnd^2}{m^2+n^2}$.

103. а) $1:1$; б) $(\sqrt{\pi^2+2}-\pi):2$; в) $(\sqrt{4\pi^2+3}+2\pi):2$.

104. а) $\dfrac{d^2\cos^2\varphi}{4\pi}$; б) $\dfrac{d^2\sin 2\varphi}{2\pi}$; в) $\dfrac{d^2\sin 2\varphi}{2}$; г) $\dfrac{d^2(\pi\sin 2\varphi+\cos^2\varphi)}{4\pi}$ или
$\dfrac{d^2(2\sin 2\varphi+\sin^2\varphi)}{4\pi}$.

105. а) $\dfrac{1}{2}r^2$; б) $\dfrac{1}{4}r^2\sqrt{3}$; в) $\dfrac{1}{4}r^2\sqrt{2}$; г) $\dfrac{1}{4}r^2$; д) $\dfrac{r^2\sin\varphi}{2}$.

106. а) $2h^2$; б) $\dfrac{h^2\sqrt{6}}{3}$; в) $\dfrac{2h^2\sqrt{3}}{9}$; г) $\dfrac{h^2\sqrt{3}\cos\varphi}{3\sin^2\varphi}$.

107. а) $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{10}$; б) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; в) $\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{20}$.

108. а) $6(9\pi+8)$; б) $48(\pi+1)$; в) $3(15\pi+16)$; г) $\dfrac{3(25\pi+32)}{2}$.

109. а) $2\arcsin\dfrac{1}{10}$; б) $2\arcsin\dfrac{1}{8}$; в) $2\arcsin\dfrac{1}{5}$; г) $2\arcsin\dfrac{1}{4}$; д) $2\arcsin\dfrac{1}{3}$;
е) $60°$; ж) $2\arcsin\dfrac{3}{4}$.

110. а) $\frac{h\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{h\sqrt{6}}{3}$; в) $h\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$; г) $\frac{h\sqrt{pq}}{4}$.

112. а) $60°$; б) $\arccos\frac{2}{3}$; в) $\arccos\frac{1}{3}$.

113. а) $\frac{4\pi Q\sqrt{3}}{3}$; б) $2\pi Q\sqrt{2}$; в) $4\pi Q$.

114. 1) а) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=21$;
б) $(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=59$; в) $x^2+y^2+z^2=14$;
2) а) $O\,(0; -1; -2)$, $R=1$; б) $O\,(-1; 2; 0)$, $R=\sqrt{6}$;
в) $O\,(-1; 2; 1)$, $R=\sqrt{3}$.

115. а) $2\sqrt{13}$ см; б) 6 см; в) 12 см.

116. а) 1600π см^2; б) 75π см^2; в) 9π см^2.

117. а) $\frac{\pi R^2}{4}$; б) $\frac{\pi R^2}{2}$; в) $\frac{3\pi R^2}{4}$.

118. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{41}}{8}$; в) $\frac{\sqrt{1529}}{40}$.

119. а) $\frac{5a}{8}$; б) $\frac{9a\sqrt{3}}{20}$; в) $a(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

120. а) $\frac{a^3\sqrt{3}}{72}$, $\frac{a^3}{24}$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$; б) $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$, $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; в) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$, $\frac{3a^3}{4}$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

121. а) $\frac{a^3\sqrt{\cos 2\gamma}}{6\sin\gamma}$; б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\operatorname{tg}\alpha$; в) $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\beta$; г) $\frac{a^2\sqrt{2}\sin 2\varphi}{6\sqrt{\cos 4\varphi}}$;

д) $\frac{4}{3}b^3\sin^2\gamma\sqrt{\cos 2\gamma}$; е) $\frac{2}{3}b^3\sin\alpha\cos^3\alpha$; ж) $\frac{4b^3\operatorname{tg}\beta}{3(\operatorname{tg}^2\beta+2)\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+2}}$;

з) $\frac{2b^3\cos\varphi\cos 2\varphi}{3\sin^2\varphi}$; и) $\frac{4h^3\operatorname{tg}^2\gamma\sqrt{1-4\operatorname{tg}^2\gamma}}{3}$; к) $\frac{4\sqrt{2}h^3\operatorname{tg}\alpha}{3(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$;

л) $\frac{4}{3}h^3\sin\beta\cos^2\beta$; м) $\frac{H^3\sin^2\gamma}{3\cos 2\gamma}$; н) $\frac{2H^3}{3\operatorname{tg}^2\alpha}$; о) $\frac{8H^3}{3\operatorname{tg}^2\beta}$;

п) $\frac{H^3\sqrt{3}\sin(\varphi+30°)\sin(\varphi-30°)}{\cos^2\varphi}$; р) $\frac{2Q\sqrt{Q}}{3\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$; с) $\frac{4Q\sqrt{Q\operatorname{tg}\beta}}{3\sqrt{2\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}}$.

122. а) $\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\alpha$; б) $\frac{a^3}{24}\operatorname{tg}\beta$; в) $\frac{a^3\sqrt{\sin(60°-\gamma)\sin(60°+\gamma)}}{12\sin\gamma}$;

г) $\frac{a^3\cos\varphi}{24\sqrt{\sin(\varphi-30°)\sin(\varphi+30°)}}$; д) $\frac{b^3\sqrt{3}\sin^3\alpha}{12}$;

е) $\frac{4b^3\operatorname{tg}\beta}{(\operatorname{tg}^2\beta+4)\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+4}}$; ж) $2b^3\sin^2\frac{\gamma}{2}\sqrt{2\sin\left(30°-\frac{\gamma}{4}\right)\sin\left(30°+\frac{\gamma}{4}\right)}$;

з) $\frac{b^3(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}^2\varphi}$; и) $\frac{2h^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{(1+4\operatorname{tg}^2\alpha)\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}}$; к) $\sqrt{3}h^3\cos^2\beta\sin\beta$;

л) $\frac{2h^3\sin^2\frac{\gamma}{2}}{3\cos^4\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)}$; м) $\frac{H^3}{\operatorname{tg}^2\alpha}$; н) $\frac{4H^3}{\operatorname{tg}^2\beta}$;

о) $\frac{4H^3\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2}$; п) $H^3(\operatorname{tg}^2\varphi-1)$; р) $\frac{q^3}{9\sin2\beta}$; с) $\frac{4\sqrt{3}q^3}{9\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(3-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)}$.

123. а) $\frac{c^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{48}$, $\frac{c^3\operatorname{tg}\alpha}{24}$, $\frac{c^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{48}$; б) $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

124. а) $\frac{3\pi^3\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{4\pi h^3}{27}$; в) $\frac{4d^3\sqrt{13}}{169}$.

125. $\frac{a^3}{36}(9\sqrt{3}-2\pi)$. **126.** $\frac{a^3}{4}(4-\pi)$.

127. а) $\frac{3}{4}\pi r^2h$; б) $\frac{5}{6}\pi r^2h$; в) $\frac{7}{8}\pi r^2h$; г) $\frac{11}{12}\pi r^2h$; д) $\frac{r^2h}{8}(6\pi+1)$.

128. а) $32\frac{\pi}{3}\sqrt{5}$; б) 96π; в) $16\pi\sqrt{33}$; г) $12\pi\sqrt{85}$; д) $24\pi\sqrt{7}$.

129. а) $\frac{500\pi\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1000\pi\sqrt{2}}{3}$; б) 2308π, 288π; в) $54\pi\sqrt{3}$, $27\pi\sqrt{7}$.

130. $\frac{24}{7}\pi$ см^3. **131.** $216°$.

132. а) $\frac{r^2h}{36}(10\pi+3\sqrt{3})$; б) $\frac{r^2h}{12}(3\pi+2)$; в) $\frac{r^2h}{36}(8\pi+9\sqrt{3})$.

133. а) $\frac{r^2h}{36}(8\pi+9\sqrt{3}-9)$; б) $\frac{r^2h}{16}(8\pi+4\sqrt{3}-\sqrt{7})$; в) $\frac{r^2h}{72}(16\pi+15\sqrt{3}-9\sqrt{7})$.

134. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{91\pi\sqrt{3}}{81}$; г) $\frac{5\pi\sqrt{3}}{27}$.

135. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{256\pi}{243}$; г) $\frac{\pi}{81}(128-45\sqrt{3}), \frac{56\pi}{81}$.

136. а) $\frac{11}{20}, \frac{11}{20}, \frac{9}{20}$; в) $\frac{243\pi(3\sqrt{3}-4)}{4000}$.

137. $\frac{\pi b^2}{\sin^2\varphi}$. **138.** $\frac{\pi a^2}{3}\operatorname{tg}^2\beta$. **139.** $\pi a^2 \operatorname{tg}(45^\circ-\gamma)$.

140. а) $1:1$; б) $1:16$; в) $1:18$; г) $1:(2-\sqrt{3})$; д) $1:(3-2\sqrt{2})$.

141. $1:1$ и $9:7$. **142.** $\frac{24+7\pi}{48}$. **143.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{4}$. **144.** $8:\sqrt{41}$.

145. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **146.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **147.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$. **148.** $\frac{3\sqrt{2}}{8}a$. **149.** 6 см.

150. а) $a(9+\sqrt{3})$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(6+\sqrt{5})$; в) $\frac{29a^3}{32}$.

151. а) $a\sqrt{6}$; б) $\frac{a\sqrt{42}}{6}$; в) $\frac{a\sqrt{14}}{2}$; г) $2a$; д) $2a$; е) $\frac{a}{3}\sqrt{27+6\sqrt{6}}$;
ж) $\frac{a}{3}\sqrt{27-6\sqrt{6}}$.

152. а) $\frac{a}{3}(21+2\sqrt{6})$; б) $\frac{2a^2}{3}(3+\sqrt{2}+\sqrt{5})$; в) $\frac{8a^3}{9}$.

153. а) $\frac{a}{2}(4+\sqrt{5}), \frac{a}{2}(4+\sqrt{13}), \frac{a}{2}(9+\sqrt{2}+3\sqrt{5})$; б) $\frac{9a^2}{2}$; в) $\frac{47a^3}{96}$.

154. а) $\frac{a}{6}(9+4\sqrt{2}+\sqrt{47})$; б) $\frac{31a^2}{12}$; в) $\frac{31a^3\sqrt{3}}{144}$.

155. а) $2a$; б) $\frac{a^2}{8}(28+6\sqrt{2}+\sqrt{5})$; в) $\frac{5a^3}{8}$.

156. а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}(8+\sqrt{2}+\sqrt{14})$; б) $\frac{a^2}{4}(4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6})$; в) $\frac{a^3}{4}(11-4\sqrt{2})$.

157. а) $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3}+\sqrt{5})$; б) $\frac{a^2}{4}(3+\sqrt{3})$; в) $\frac{11a^3\sqrt{3}}{24}$.

158. а) $\frac{a}{2}(8+\sqrt{10})$; б) $\frac{a^2}{8}(2\sqrt{3}+\sqrt{15})$; в) $\frac{a^3}{16}$; г) $\frac{a^3}{16}(17-2\sqrt{6})$.

159. а) $a(\sqrt{2}+\sqrt{6})$; б) $a^2(1+\sqrt{2})$; в) $\frac{a^3}{3}(6-\sqrt{2})$.

Содержание

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Литвиненко Виктор Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Готовимся к ЕГЭ

11 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова.* Редактор *Л. В. Кузнецова.* Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко.* Художники *О. П. Богомолова, А. Ю. Юдкин.* Художественный редактор *О. П. Богомолова.* Компьютерная графика *К. В. Кергелен, О. Ю. Тупикиной, С. А. Крутикова.* Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Н. В. Лукиной.* Корректор *И. П. Ткаченко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 28.06.12. Формат 70×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,73. Тираж 5000 экз. Заказ № 2705.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных издательством материалов в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.